Wir bezeichnen (wie immer) mit $\gamma_{x,r}\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ für $x \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ die Schleife gegeben durch

$$t \longmapsto x + r \cdot \operatorname{cis}(t).$$

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Bestimmen Sie

$$\int_{\gamma_{x,r}} \frac{1}{z^2+1} \mathrm{d}z$$

für alle $x \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ mit $|x-i| \neq r \neq |x+i|$.

Hinweis: Partialbruchzerlegung.

Lösungsskizze. Die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i}\frac{1}{z-i} + \frac{-1}{2i}\frac{1}{z+i}$$

hatten wir uns schon vor einer Weile überlegt. Wir müssen uns also nur mit den einzelnen Summanden auseinander setzen. Damit sehen wir dass es vier Fälle gibt:

1. Es gilt $|x-i|, |x+i| > r$. Dann folgt $\mathrm{Int}_{\gamma_{x,r}} \cap \{\pm i\} = \emptyset$ und nach Cauchys Integralformel ist das Integral für beide Terme 0.
2. $|x-i| < r < |x+i|$. Dann folgt $\mathrm{Int}_{\gamma_{x,r}} \cap \{\pm i\} = \{i\}$ und das Integral ist nach der Integraformel beim linken Term $\frac{2\pi i}{2i}$, beim rechten 0, in Summe also π.
3. $|x+i| < r < |x-i|$. Dann folgt $\mathrm{Int}_{\gamma_{x,r}} \cap \{\pm i\} = \{-i\}$ und das Integral ist nach der Integraformel beim linken Term 0, beim rechten $\frac{-2\pi i}{2i}$, in Summe also $-\pi$.
4. Es gilt $r < |x-i|, |x+i|$. Dann folgt $\mathrm{Int}_{\gamma_{x,r}} \cap \{\pm i\} = \{\pm i\}$ und nach Cauchys Integralformel ist das Integral für den linken Term $\frac{2\pi i}{2i}$, für den rechten $\frac{-2\pi i}{2i}$ in Summe also 0.

□

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass für eine holomorphe Funktion $f\colon \mathrm{D}(x,r) \to \mathbb{C}$

$$\int_{\gamma_{x,s}} \overline{f} = 2\pi i s^2 \overline{f'(x)}$$

für jedes $0 < s < r$ gilt.

Lösungsskizze. Wir entwickeln f in die Potenzreihe $f(z) = \sum_{k\geq 0} F_k(z-x)^k$, was auf $\overline{\mathrm{D}(x,s)}$ gleichmäßig konvergiert, sodass Integration und Summation vertauscht werden dürfen. Damit rechnen wir

$$\int_{\gamma_{x,s}} \overline{f} = \int_{\gamma_{x,s}} \overline{\sum_{k\geq 0} F_k(z-x)^k} \mathrm{d}z = \sum_{k\geq 0} \overline{F_k} \int_{\gamma_{x,s}} \overline{(z-x)}^k \mathrm{d}z.$$

Auf $\partial \mathrm{D}(x,s)$ stimmt die Funktion $z \mapsto \overline{z-x}$ wegen $w\overline{w} = |w|^2$ mit $z \mapsto \frac{s^2}{z-x}$ überein. Es folgt also

$$\int_{\gamma_{x,s}} \overline{f} = \sum_{k\geq 0} \overline{F_k} \int_{\gamma_{x,s}} \frac{s^{2k}}{(z-x)^k} \mathrm{d}z = \sum_{k\geq 0} \overline{F_k} s^{2k} \int_{\gamma_{x,s}} \frac{1}{(z-x)^k} \mathrm{d}z.$$

Hier verschwindet nun das Integral nur für $k = 1$ nicht (alle anderen Integranden besitzen schließlich Stammfunktionen) und wegen $F_1 = f'(x)$ erhalten wir also

$$\int_{\gamma_{x,s}} \overline{f} = \overline{F_1} s^2 \int_{\gamma_{x,s}} \frac{1}{z-x} \mathrm{d}z = 2\pi i s^2 \overline{f'(x)}$$

wie behauptet. □

Aufgabe 3 (5 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass jede bijektive holomorphe Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch ein Polynom vom Grad 1 gegeben ist.

2. Geben Sie ein Beispiel einer bijektiven analytischen Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit analytischer Umkehrabbildung an, die nicht durch so ein Polynom gegeben ist.

Lösungsskizze. Zu 1: Ich behaupte, dass $|f(z)| \to \infty$ bei $|z| \to \infty$ gilt (sogar schon für jede bijektive Abbildung deren Umkehrabbildung stetig ist). Dann ist f nach einer Aufgabe vom Vorzettel ein Polynom, und als Korollar zum Satz von der Gebietstreue hat f' aufgrund der Injektivität von f keine Nullstelle. Da f' auch ein Polynom ist, muss f' nach dem Fundamentalsatz der Algebra konstant sein, also f selber linear, wie gewünscht.

Um die Behauptung zu sehen, sei $r > 0$. Dann ist das Urbild $f^{-1}(\overline{\mathrm{D(r)}})$ als Bild einer kompakten Menge unter der stetigen (es ist wegen der Injektivität von f ja f' nirgends 0, sodass die Umkehrabbildung sogar selbst wieder holomorph ist) Abbildung $f^{-1}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ selbst kompakt, also beschränkt. Es gibt also ein $s > 0$ mit $f^{-1}(\overline{\mathrm{D(r)}}) \subseteq \overline{\mathrm{D}(s)}$ oder mit anderen Worten, derart dass aus $|z| > s$ schon $|f(z)| > r$ folgt, was nichts anderes als die Behauptung ist.

Mit ein wenig mehr Aufwand kann man auch zeigen, dass sogar die Voraussetzung, dass f injektiv ist für die Conclusio genügt (obiges Argument reicht dazu aber nicht aus: es gibt durchaus stetige Injektionen mit stetiger Inverser die $\mathbb{C}$ auf D(1) abbilden). Man kann aber etwa $z \mapsto f(\frac{1}{z})$ als Abbildung $g\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ anschauen und die Singularität bei 0 analysieren. Wäre 0 eine essentielle Singularität, dann würde nach dem Satz von Casorati-Weierstraß $f(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathrm{D}(r)})$ für jedes $r > 0$ dicht in $\mathbb{C}$ liegen. Da aber auch nach dem Satz von der Gebietstreue $f(\mathrm{D}(r))$ offen in $\mathbb{C}$ liegt, müssten diese beiden Mengen sich schneiden, was durch die Injektivität von f ausgeschlossen ist. Und wäre 0 ein hebbare Singularität, so wäre g wegen $g(z) \to f(0)$ bei $|z| \to \infty$ eine beschränkte ganze Funktion, also nach Liouville konstant im Widerspruch zur Injektivität von f. Also muss 0 ein Pol von g sein, was genau $|f(z)| \to \infty$ bei $|z| \to \infty$ bedeutet, und der Rest des Arguments geht wie oben.

Zu 2: Etwa tun $t \to t^3 + t$ oder auch der Sinus hyperbolicus das gewünschte. □

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Finden Sie eine eine Schleife $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ derart, dass weder $\mathrm{Int}(\gamma)$ noch $\mathrm{Ext}(\gamma)$ zusammenhängen.

Anmerkung: Hier bezeichnen

$$\mathrm{Int}(\gamma) = \{x \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{im}(\gamma) \mid \mathrm{ind}_x(\gamma) \neq 0\}$$

und

$$\mathrm{Ext}(\gamma) = \{x \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{im}(\gamma) \mid \mathrm{ind}_x(\gamma) = 0\}$$

das *Innere* beziehungsweise *Äußere* von γ.

Lösungsskizze. Die einfachste solche Schleife besteht vielleicht aus zwei sich an zwei Stellen schneidenen Kreisen, etwa

$$\beta = \gamma_{0,1} * \gamma_{1+i,1}((-) - \tfrac{\pi}{2})^{\mathrm{rev}}$$

mit den beiden Schnittpunkten 1 und i (die zweite Schleife ist hier so rotiert, dass sie bei 1 und nicht bei $2+i$ anfängt). Es bilden dann offenbar die vier Bereiche

$$\mathbb{C} \setminus [\overline{\mathrm{D}(1)} \cup \overline{\mathrm{D}(1+i,1)}], \quad \mathrm{D}(1) \setminus \mathrm{D}(1+i,1), \quad \mathrm{D}(1+i,1) \setminus \mathrm{D}(1), \quad \mathrm{D}(1) \cap \mathrm{D}(1+i,1)$$

das Komplement des Bildes von β. Da sich Windungszahlen beim Konkatenieren von Wegen addieren, haben Punkte im linken Windungszahl 0, in den mittleren 1 bzw. -1 und im letzten wieder 0. Es ist also das Innere von β sicherlich nicht zusammenhängend: $0 \in \mathrm{D}(1) \setminus \mathrm{D}(1+i,1)$ und $1+i \in \mathrm{D}(1+i,1) \setminus \mathrm{D}(1)$ können sicherlich nicht durch einen Weg verbunden werden (dann müssten sie ja gleiche Windungszahl haben). Und das Äußere hängt ebenfalls nicht zusammen, denn für jeden Weg $w\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, der $\frac{1+i}{2} \in \mathrm{D}(1) \cap \mathrm{D}(i+1,1)$ mit $2+2i \in \mathbb{C} \setminus [\overline{\mathrm{D}(1)} \cup \overline{\mathrm{D}(1+i,1)}]$ verbindet, muss $|w|$ nach dem Zwischenwertsatz der Analysis jeden Wert zwischen $\left|\frac{1+i}{2}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ und $|2+2i| = 2\sqrt{2} > 1$ annehmen, insbesondere auch 1 selbst, und damit muss er das Äußere von β verlassen. □