Wir bezeichnen (wie immer) mit $\gamma_{x,r} : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ für $x \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ die Schleife gegeben durch

$$t \longmapsto x + r \cdot \operatorname{cis}(t).$$

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Bestimmen Sie

$$\int_{\gamma_{x,r}} \frac{1}{z^2+1} \mathrm{d}z$$

für alle $x \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ mit $|x - i| \neq r \neq |x + i|$.

Hinweis: Partialbruchzerlegung.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass für eine holomorphe Funktion $f : \mathrm{D}(x, r) \to \mathbb{C}$

$$\int_{\gamma_{x,s}} \overline{f} = 2\pi i s^2 \overline{f'(x)}$$

für jedes $0 < s < r$ gilt.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass jede bijektive holomorphe Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch ein Polynom vom Grad 1 gegeben ist.
2. Geben Sie ein Beispiel einer bijektiven analytischen Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit analytischer Umkehrabbildung an, die nicht durch so ein Polynom gegeben ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Finden Sie eine eine Schleife $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ derart, dass weder $\operatorname{Int}(\gamma)$ noch $\operatorname{Ext}(\gamma)$ zusammenhängen.

Anmerkung: Hier bezeichnen

$$\operatorname{Int}(\gamma) = \{x \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{im}(\gamma) \mid \operatorname{ind}_x(\gamma) \neq 0\}$$

und

$$\operatorname{Ext}(\gamma) = \{x \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{im}(\gamma) \mid \operatorname{ind}_x(\gamma) = 0\}$$

das *Innere* beziehungsweise *Äußere* von γ.