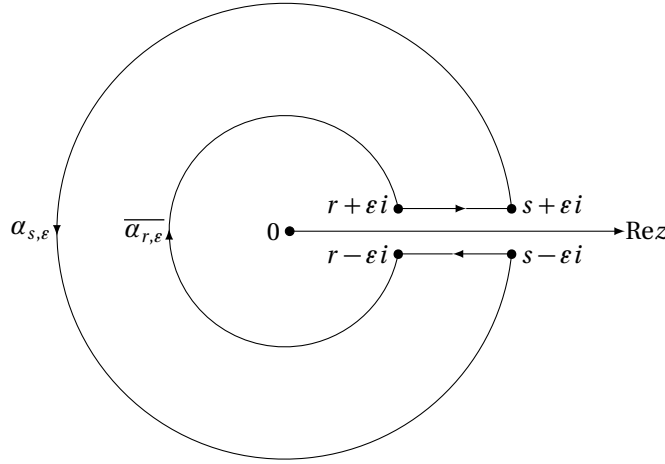


Aufgabe 1

Seien $0 < r < s$ und $\varepsilon > 0$. Wir bezeichnen mit $\gamma = [r + \varepsilon i, s + \varepsilon i] * \alpha_{s,\varepsilon} * [s - \varepsilon i, r - \varepsilon i] * \overline{\alpha_{r,\varepsilon}}$ die im Hinweis beschriebene Schleife, wobei $\alpha_{u,\varepsilon}$ ein Kreisbogen mit Radius $\rho_{u,\varepsilon} = \sqrt{q^2 + \varepsilon^2}$ und passenden Start- und Endwinkeln ist: Sei dafür $\delta_{u,\varepsilon} = \arctan\left(\frac{\varepsilon}{q}\right)$, dann ist

$$\alpha_{u,\varepsilon} = \gamma_{0, \rho_{u,\varepsilon}} | [\delta_{u,\varepsilon}, 2\pi - \delta_{u,\varepsilon}] .$$

Damit ergibt sich folgendes Bild:



Es ist also

$$\int_{\gamma} \frac{p}{q} \cdot l = \int_{[r+\varepsilon i, s+\varepsilon i]} \frac{p}{q} \cdot l + \int_{\alpha_{s,\varepsilon}} \frac{p}{q} \cdot l + \int_{[s-\varepsilon i, r-\varepsilon i]} \frac{p}{q} \cdot l + \int_{\overline{\alpha_{r,\varepsilon}}} \frac{p}{q} \cdot l$$

Wir betrachten zunächst die Grenzwerte für $\varepsilon \rightarrow 0$: Dafür wählen wir Logarithmusfunktionen $l^{\cap}$ auf S_{-i} und $l^{\cup}$ auf S_i , die auf der oberen bzw. unteren Halbebene mit l übereinstimmen. Dann ist für $t > 0$

$$l^{\cap}(t) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} l(t + \varepsilon i) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} l(t - \varepsilon i) - 2\pi i = l^{\cup}(t) - 2\pi i.$$

Für die Integrale entlang der geraden Wege gilt dann:

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\int_{[r+\varepsilon i, s+\varepsilon i]} \frac{p}{q} \cdot l + \int_{[s-\varepsilon i, r-\varepsilon i]} \frac{p}{q} \cdot l \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\int_{[r+\varepsilon i, s+\varepsilon i]} \frac{p}{q} \cdot l^{\cap} + \int_{[s-\varepsilon i, r-\varepsilon i]} \frac{p}{q} \cdot l^{\cup} \right) \\ &= \int_{[r,s]} \frac{p}{q} \cdot l^{\cap} + \int_{[s,r]} \frac{p}{q} \cdot l^{\cup} \\ &= \int_r^s \frac{p(t)}{q(t)} \cdot (l^{\cup}(t) - 2\pi i) dt - \int_r^s \frac{p(t)}{q(t)} \cdot l^{\cup}(t) dt \\ &= -2\pi i \cdot \int_r^s \frac{p(t)}{q(t)} dt \end{aligned}$$

Für die Kreisbögen bemerken wir zunächst, dass $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \delta_{u,\varepsilon} = 0$ und $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \rho_{u,\varepsilon} = u$ ist. Dann ist

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\alpha_{u,\varepsilon}} \frac{p}{q} \cdot l &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\gamma_{0,\rho_{u,\varepsilon}}[\delta_{u,\varepsilon}, 2\pi - \delta_{u,\varepsilon}]} \frac{p}{q} \cdot l \\
&= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\int_{\gamma_{0,\rho_{u,\varepsilon}}[\delta_{u,\varepsilon}, \pi]} \frac{p}{q} \cdot l + \int_{\gamma_{0,\rho_{u,\varepsilon}}[\pi, 2\pi - \delta_{u,\varepsilon}]} \frac{p}{q} \cdot l \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\int_{\gamma_{0,\rho_{u,\varepsilon}}[\delta_{u,\varepsilon}, \pi]} \frac{p}{q} \cdot l^\cap + \int_{\gamma_{0,\rho_{u,\varepsilon}}[\pi, 2\pi - \delta_{u,\varepsilon}]} \frac{p}{q} \cdot l^\cup \right) \\
&= \int_{\gamma_{0,u}[[0, \pi]]} \frac{p}{q} \cdot l^\cap + \int_{\gamma_{0,u}[[\pi, 2\pi]]} \frac{p}{q} \cdot l^\cup
\end{aligned}$$

Es gibt ein $n \in \mathbb{Z}$, sodass $l(\exp(ti)) = ti + 2\pi i \cdot n$ für $0 < t < 2\pi$ gilt. Damit ist auch $l^\cap(\exp(ti)) = ti + 2\pi i \cdot n$ für $0 \leq t \leq \pi$, und $l^\cup(\exp(ti)) = ti + 2\pi i \cdot n$ für $\pi \leq t \leq 2\pi$. Für $\text{Im}(z) \geq 0$ ist dann $|l^\cap(z)| \leq |\ln(|z|)| + \pi(2n+1)$, und für $\text{Im}(z) \leq 0$ analog $|l^\cup(z)| \leq |\ln(|z|)| + 2\pi(n+1)$. Wir setzen $p(z) = \sum_{i=0}^k p_i z^i$ und $q(z) = \sum_{i=0}^{k+l} q_i z^i$, wobei $l \geq 2$ ist. Dann ist für $\text{Im}(z) \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\lim_{|z| \rightarrow \infty} \left| z \cdot \frac{p(z)}{q(z)} \cdot l^\cap(z) \right| &= \lim_{|z| \rightarrow \infty} \left| \frac{\sum_{i=0}^k p_i z^{i+1}}{\sum_{j=0}^{k+l} q_j z^j} \cdot l^\cap(z) \right| \\
&= \lim_{|z| \rightarrow \infty} \left| \left(\frac{1}{z^{l-1}} \cdot \frac{p_k + \frac{p_{k-1}}{z} + \dots + \frac{p_0}{z^{k+1}}}{q_{k+l} + \frac{q_{k+l-1}}{z} + \dots + \frac{q_0}{z^{k+l}}} \right) \cdot l^\cap(z) \right| \\
&= \frac{p_k}{q_{k+l}} \lim_{|z| \rightarrow \infty} \left| \frac{l^\cap(z)}{z^{l-1}} \right| \\
&\leq \frac{p_k}{q_{k+l}} \lim_{|z| \rightarrow \infty} \left| \frac{l^\cap(z)}{z^{l-1}} \right| \\
&\leq \frac{p_k}{q_{k+l}} \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{|\ln(|z|)| + \pi(2n+1)}{|z|^{l-1}}
\end{aligned}$$

Dieser Limes verschwindet aber mit l'Hôpital. Analog ist $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \left| z \cdot \frac{p(z)}{q(z)} \cdot l^\cap(z) \right| = 0$ für $\text{Im}(z) \leq 0$, also folgt mit dem selben Argument wie in Lemma 9.1:

$$\begin{aligned}
\lim_{s \rightarrow \infty} \left| \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\alpha_{s,\varepsilon}} \frac{p}{q} \cdot l \right| &\leq \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\left| \int_{\gamma_{0,s}[[0, \pi]]} \frac{p}{q} \cdot l^\cap \right| + \left| \int_{\gamma_{0,s}[[\pi, 2\pi]]} \frac{p}{q} \cdot l^\cup \right| \right) \\
&\leq \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\pi \cdot s \cdot \left\| \frac{p}{q} \cdot l^\cap \right\|_{\gamma_{0,s}[[0, \pi]]} + \pi \cdot s \cdot \left\| \frac{p}{q} \cdot l^\cup \right\|_{\gamma_{0,s}[[\pi, 2\pi]]} \right) \\
&= \pi \cdot \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\left\| z \cdot \frac{p(z)}{q(z)} \cdot l^\cap(z) \right\|_{\gamma_{0,s}[[0, \pi]]} + \left\| z \cdot \frac{p(z)}{q(z)} \cdot l^\cup(z) \right\|_{\gamma_{0,s}[[\pi, 2\pi]]} \right) = 0
\end{aligned}$$

Ähnlich ist, da $q(0) \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\lim_{r \searrow 0} \left| \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\alpha_{r,\varepsilon}} \frac{p}{q} \cdot l \right| &\leq \lim_{r \searrow 0} \left(\left| \int_{\gamma_{0,r} \setminus [0,\pi]} \frac{p}{q} \cdot l^\cap \right| + \left| \int_{\gamma_{0,r} \setminus [\pi,2\pi]} \frac{p}{q} \cdot l^\cup \right| \right) \\
&\leq \lim_{r \searrow 0} \left(\pi \cdot r \cdot \left\| \frac{p}{q} \cdot l^\cap \right\|_{\gamma_{0,r} \setminus [0,\pi]} + \pi \cdot r \cdot \left\| \frac{p}{q} \cdot l^\cup \right\|_{\gamma_{0,r} \setminus [\pi,2\pi]} \right) \\
&= \pi \cdot \left| \frac{p(0)}{q(0)} \right| \cdot \lim_{r \searrow 0} \left(\|z \cdot l^\cap(z)\|_{\gamma_{0,r} \setminus [0,\pi]} + \|z \cdot l^\cup(z)\|_{\gamma_{0,r} \setminus [\pi,2\pi]} \right) \\
&\leq \pi \cdot \left| \frac{p(0)}{q(0)} \right| \cdot \lim_{r \searrow 0} \left(r \cdot (|\ln(r)| + \pi(2n+1)) + r \cdot (|\ln(r)| + 2\pi(n+1)) \right) \\
&= 2\pi \cdot \left| \frac{p(0)}{q(0)} \right| \cdot \lim_{r \searrow 0} r \cdot |\ln(r)|,
\end{aligned}$$

was wiederum mit l'Hôpital verschwindet.

Insgesamt gilt also:

$$\begin{aligned}
\lim_{r \searrow 0} \lim_{s \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\gamma} \frac{p}{q} \cdot l &= \lim_{r \searrow 0} \lim_{s \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\int_{[r+\varepsilon i, s+\varepsilon i]} \frac{p}{q} \cdot l + \int_{[s-\varepsilon i, r-\varepsilon i]} \frac{p}{q} \cdot l + \int_{\alpha_{s,\varepsilon}} \frac{p}{q} \cdot l - \int_{\alpha_{r,\varepsilon}} \frac{p}{q} \cdot l \right) \\
&= \lim_{r \searrow 0} \lim_{s \rightarrow \infty} \left(-2\pi i \cdot \int_r^s \frac{p(t)}{q(t)} dt \right) + \underbrace{\lim_{r \searrow 0} \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\alpha_{s,\varepsilon}} \frac{p}{q} \cdot l \right)}_0 - \underbrace{\lim_{r \searrow 0} \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\alpha_{r,\varepsilon}} \frac{p}{q} \cdot l \right)}_0 \\
&= -2\pi i \cdot \int_0^\infty \frac{p(t)}{q(t)} dt.
\end{aligned}$$

Andererseits hat q aber nur endlich viele Nullstellen, die alle nicht auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ liegen. Somit liegt für alle ausreichend kleinen ε und r sowie ausreichend großen s jede Nullstelle von q im inneren von γ , und hat Windungszahl 1. (Beispielsweise, weil γ homotop ist zu $\alpha_{s,\varepsilon}$: Das sehen wir, indem wir erst den inneren Kreisbogen vertikal stauchen, bis die Imaginärteile in $[-\varepsilon, \varepsilon]$ liegen, und dann nach rechts ziehen: Diese Homotopie trifft das Innere von γ nicht, verändert also auch nicht die Windungszahlen der Nullstellen.) Die Nullstellen von q sind gerade die Singularitäten von $\frac{p}{q} \cdot l$ in S_1 . Damit ist nach dem Residuensatz

$$\lim_{r \searrow 0} \lim_{s \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\gamma} \frac{p}{q} \cdot l = 2\pi i \cdot \sum_{q(z)=0} \operatorname{res}_z \left(\frac{p}{q} \cdot l \right)$$

Zusammen ergibt das die zu zeigende Gleichung.

Aufgabe 2

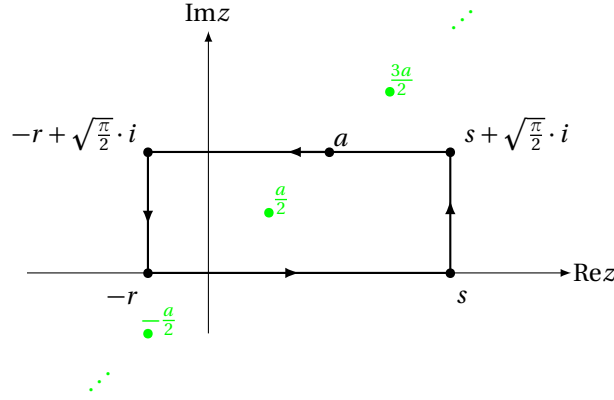
(1) Es ist $a^2 = (1+i)^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi i$, also

$$g(z+a) = \frac{\exp(-(z+a)^2)}{1 + \exp(-2a(z+a))} = \frac{\exp(-z^2 - 2az - \pi i)}{1 + \exp(-2az - 2\pi i)} = \frac{\exp(-z^2 - 2az) \cdot (-1)}{1 + \exp(-2az) \cdot 1},$$

und somit

$$g(z) - g(z+a) = \frac{\exp(-z^2) + \exp(-z^2 - 2az)}{1 + \exp(-2az)} = \exp(-z^2) \cdot \frac{1 + \exp(-2az)}{1 + \exp(-2az)} = \exp(-z^2).$$

(2) Sei $r > 0$ und $s > \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Wir betrachten den Rechtecksweg γ mit Ecken $-r$, s , $s + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot i$ und $-r + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot i$:



Dabei ist in grün die Menge $S = \left\{ \frac{2n+1}{2} \cdot a : n \in \mathbb{Z} \right\}$ der Singularitäten von g abgebildet. Insbesondere liegt nur eine Singularität im Inneren von γ , nämlich $\frac{a}{2}$. Diese hat Windungszahl 1 bezüglich γ , also gilt nach dem Residuensatz:

$$\int_{\gamma} g = 2\pi i \cdot \text{res}_{\frac{a}{2}}(g)$$

Wir müssen also nur noch das Residuum berechnen. Dafür betrachten wir

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \frac{a}{2}} \left(z - \frac{a}{2} \right) \cdot g(z) &= \lim_{z \rightarrow \frac{a}{2}} \frac{\left(z - \frac{a}{2} \right) \cdot \exp(-z^2)}{1 + \exp(-2az)} \\ &= \lim_{z \rightarrow \frac{a}{2}} \frac{1 \cdot \exp(-z^2) + \left(z - \frac{a}{2} \right) \cdot \exp(-z^2) \cdot (-2z)}{\exp(-2az) \cdot (-2a)} \\ &= \frac{-1}{2a} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{a^2}{4}\right) + 0 \cdot \exp\left(-\frac{a^2}{4}\right) \cdot (-a)}{\exp(-a^2)} \\ &= \frac{-1}{(1+i)\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(\pi i \left(1 - \frac{1}{4}\right)\right) \\ &= \frac{-1}{2\sqrt{\pi} \cdot \exp\left(\frac{\pi}{4}\right)} \cdot \exp\left(\frac{3\pi i}{4}\right) \\ &= \frac{-1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \exp\left(\frac{\pi i}{2}\right) \\ &= \frac{-i}{2\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

Da der Grenzwert existiert, ist $\frac{a}{2}$ ein Pol von Grad 1, und das Residuum ist gerade der obige Grenzwert. Damit ist

$$\int_{\gamma} g = 2\pi i \cdot \text{res}_{\frac{a}{2}}(g) = 2\pi i \cdot \frac{-i}{2\sqrt{\pi}} = \sqrt{\pi}.$$

- (3) Wir betrachten nun das Grenzwertverhalten von $\int_{\gamma} g$, wenn $r, s \rightarrow \infty$ laufen: Einerseits ändert sich natürlich das Ergebnis aus (2) nicht, andererseits ist aber auch

$$\int_{\gamma} g = \int_{[-r, s]} g + \int_{[s, s + \sqrt{\frac{\pi}{2}}i]} g + \int_{[s + \sqrt{\frac{\pi}{2}}i, -r + \sqrt{\frac{\pi}{2}}i]} g + \int_{[-r + \sqrt{\frac{\pi}{2}}i, -r]} g \quad (1)$$

Wir schauen uns wieder das Grenzwertverhalten der Summanden separat an: Dafür bemerken wir zunächst, dass

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} g(z) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\exp(-z^2)}{1 + \exp(-2az)} = \frac{0}{1 + 0} = 0,$$

und somit

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow \infty} \left| \int_{[s, s + \sqrt{\frac{\pi}{2}} i]} g \right| &\leq \lim_{s \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \|g\|_{[s, s + \sqrt{\frac{\pi}{2}} i]} \leq \lim_{s \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \|g\|_{\mathbb{C} \setminus D(s)} = 0, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \left| \int_{[-r + \sqrt{\frac{\pi}{2}} i, -r]} g \right| &\leq \lim_{s \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \|g\|_{[-r + \sqrt{\frac{\pi}{2}} i, -r]} \leq \lim_{s \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \|g\|_{\mathbb{C} \setminus D(r)} = 0.\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\sqrt{\pi} &= \lim_{s \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma} g \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\int_{[-r, s]} g + \int_{[s + \sqrt{\frac{\pi}{2}} i, -r + \sqrt{\frac{\pi}{2}} i]} g \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\int_{[-r, s]} g - \int_{[-r + \sqrt{\frac{\pi}{2}} i, s + \sqrt{\frac{\pi}{2}} i]} g \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\int_{[-r, s]} g - \int_{[-r, s]} g \left(- + \sqrt{\frac{\pi}{2}} i \right) \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\int_{[-r, s]} g - \int_{[-r - \sqrt{\frac{\pi}{2}} i, s - \sqrt{\frac{\pi}{2}} i]} g \left(- + \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} i \right) \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt - \int_{-\infty}^{\infty} g(t + a) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) - g(t + a) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt.\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Kurz zur Klärung der Notation: Wir haben ein Gitter $\Lambda \subset \mathbb{C}$, das von linear unabhängigen $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ erzeugt ist, d.h.:

$$\Lambda = \{m w_1 + n w_2 : m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

(Da die Erzeuger unabhängig sind, ist die Darstellung $w = m w_1 + n w_2$ natürlich eindeutig.) Dann bezeichnet $\mathbb{C}/\Lambda$ die Menge der Äquivalenzklassen unter folgender Relation

$$z \sim z' \Leftrightarrow \exists w \in \Lambda : z + w = z'.$$

Es gibt besonders hübsche Sammlungen von Repräsentanten für diese Äquivalenzklassen: Betrachte für ein $x \in \mathbb{C}$ die Menge

$$F_x = \{x + a_1 w_1 + a_2 w_2 : a_1, a_2 \in [0, 1)\}.$$

Dann gibt es für jedes $[z] \in \mathbb{C}/\Lambda$ genau ein $z' \in F_x$ mit $[z] = [z']$.

Wähle nun ein beliebiges $x \in \mathbb{C}$. Dann gibt es nur endlich viele Singularitäten von f in der kompakten Menge $\overline{F_x}$. Daher können wir $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in [0, 1)$ wählen, sodass für $x' = x + \varepsilon_1 w_1 + \varepsilon_2 w_2$ keine Singularität auf dem Rand von $F_{x'}$ liegt.

Dann betrachten wir den Polygonzug γ mit Ecken x' , $x' + w_1$, $x' + w_1 + w_2$, und $x' + w_2$: Es ist

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f &= \int_{[x', x' + w_1]} f + \int_{[x' + w_1, x' + w_1 + w_2]} f + \int_{[x' + w_1 + w_2, x' + w_2]} f + \int_{[x' + w_2, x']} f \\ &= \int_{[x', x' + w_1]} f + \int_{[x', x' + w_2]} f(-w_1) + \int_{[x' + w_1, x']} f(-w_2) + \int_{[x' + w_2, x']} f \\ &= \int_{[x', x' + w_1]} f + \int_{[x', x' + w_2]} f - \int_{[x', x' + w_1]} f - \int_{[x', x' + w_2]} f = 0, \end{aligned}$$

und andererseits mit dem Residuensatz

$$\int_{\gamma} f = \sum_{s \in F_{x'}} \text{res}_s(f) = \sum_{[s] \in \mathbb{C}/\Lambda} \text{res}_s(f)$$

Aufgabe 4

- (i) Wir wollen zunächst eine Abschätzung für $|w|^s$ nach unten finden: Beachte dafür, dass es eindeutige $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass $w = n_1 w_1 + n_2 w_2$ ist. Für Abschätzung von $|w|^2$ durch $(n_1^2 + n_2^2)$ betrachten wir die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \\ (x_1, x_2) &\longmapsto \frac{|x_1 w_1 + x_2 w_2|^2}{x_1^2 + x_2^2} \end{aligned}$$

Diese Funktion ist homogen, d.h., für $\lambda > 0$ ist $f(\lambda x_1, \lambda x_2) = f(x_1, x_2)$. Da $S^1 \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ kompakt ist, nimmt f dort ihr Minimum an. Mit der Homogenität ist das dann auch ein globales Minimum, es gibt also ein $\delta > 0$ mit $f \geq \delta$: Damit ist insbesondere für jedes $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ und $s > 2$:

$$|n_1 w_1 + n_2 w_2|^s = (|n_1 w_1 + n_2 w_2|^2)^{\frac{s}{2}} \geq \delta (n_1^2 + n_2^2)^{\frac{s}{2}}.$$

Für unsere Reihe erhalten wir dann

$$\sum_{w \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{|w|^s} = \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \frac{1}{|n_1 w_1 + n_2 w_2|^s} \leq \delta \cdot \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \frac{1}{(n_1^2 + n_2^2)^{\frac{s}{2}}}.$$

Für letzteres betrachten wir die Abschätzung durch das dazugehörige Integral, da der Integrand in beiden Variablen monoton fallend ist, gilt

$$\begin{aligned} \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \frac{1}{(n_1^2 + n_2^2)^{\frac{s}{2}}} &\leq \int_{x_1^2 + x_2^2 \geq 1} \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{s}{2}}} dx_1 dx_2 \\ &= \int_0^{2\pi} \int_1^{\infty} \frac{1}{(r^2)^{\frac{s}{2}}} \cdot r dr d\varphi \\ &= 2\pi \cdot \int_1^{\infty} \frac{1}{r^{s-1}} dr, \end{aligned}$$

was genau für $s > 2$ konvergiert. Dann ist auch

$$\sum_{w \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{|w|^s} \leq \delta \cdot \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \frac{1}{(n_1^2 + n_2^2)^{\frac{s}{2}}} \leq \delta \cdot 2\pi \cdot \int_1^{\infty} \frac{1}{r^{s-1}} dr < \infty.$$

- (ii) Betrachte nun ein fixes $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$. Wir spalten Λ wie folgt auf:

$$\begin{aligned} \Lambda_{\text{klein}} &= \{w \in \Lambda : |w| \leq 2|z|\} \\ \Lambda_{\text{groß}} &= \{w \in \Lambda : |w| > 2|z|\}. \end{aligned}$$

Dann ist für $w \in \Lambda_{\text{groß}}$

$$|z - w| \geq |w| - |z| \geq |w| - \frac{|w|}{2} = \frac{|w|}{2},$$

und somit

$$\begin{aligned} \sum_{w \in \Lambda} \left| \frac{1}{(z - w)^n} \right| &= \sum_{w \in \Lambda_{\text{klein}}} \frac{1}{|z - w|^n} + \sum_{w \in \Lambda_{\text{groß}}} \frac{1}{|z - w|^n} \\ &\leq \sum_{w \in \Lambda_{\text{klein}}} \frac{1}{|z - w|^n} + 2^n \cdot \sum_{w \in \Lambda_{\text{groß}}} \frac{1}{|w|^n} \\ &\leq \sum_{w \in \Lambda_{\text{klein}}} \frac{1}{|z - w|^n} + 2^n \cdot \sum_{w \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{|w|^n}. \end{aligned}$$

Dabei ist Λ_{klein} endlich, und die Reihe rechts konvergiert mit (i), also konvergiert die ganze Reihe.

Da also $\sum_{w \in \Lambda} \frac{1}{(z - w)^n}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ absolut konvergiert, beschreibt dies eine meromorphe Funktion mit Singularitäten in Λ . Mit

$$\sum_{w \in \Lambda} \frac{1}{((z + w') - w)^n} = \sum_{w \in \Lambda} \frac{1}{(z - (w - w'))^n} = \sum_{\tilde{w} \in \Lambda} \frac{1}{(z - \tilde{w})^n}$$

ist diese Funktion natürlich auch Λ -periodisch.