Aufgabe 1 (5 Punkte)

Es seien $p, q \in \mathbb{C}[T]$ Polynome mit $\deg(q) \geq \deg(p) + 2$ derart, dass q keine Nullstelle auf $\mathbb{R}_{\geq}0$ hat. Zeigen Sie:

$$\int_0^\infty \frac{p(t)}{q(t)} \mathrm{d}t = -\sum_{\substack{s \in \mathbb{C} \\ q(z)=0}} \mathrm{res}_s\left(\tfrac{p}{q} \cdot l\right),$$

wo $l : \mathrm{S}_1 \to \mathbb{C}$ ein Zweig des Logarithmus ist.

Hinweis: Integrieren Sie $\frac{p}{q} \cdot l$ entlang der Schleife, die $[r + \epsilon i, s + \epsilon i]$ und $[r - \epsilon i, s - \epsilon i]$ mit zwei nicht-ganz geschlossenen Kreisen verbindet, und lassen sie dann $r, s \to \infty$ und $\epsilon \to 0$ gehen.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion

$$g : \mathbb{C} \setminus S \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto \frac{\exp(-z^2)}{1 + \exp(-2az)}$$

für $a = (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ und $S = \left\{\frac{(2n+1)a}{2} \in \mathbb{C} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$. Zeigen Sie:

1. Es gilt $g(z) - g(z+a) = \exp(-z^2)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus S$.
2. Es sei γ der Rechtecksweg mit Ecken $-r, s, s + \mathrm{Im}(a), -r + \mathrm{Im}(a)$. Zeigen Sie $\int_\gamma g = \sqrt{\pi}$.
3. Leiten Sie
$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$$
ab.

Es sei $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ eine abelsche Gruppe, die sich von zwei über $\mathbb{R}$ linear unabhängigen Elementen $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ aufgespannen lässt, ein *Gitter*.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass für meromorphe Λ-periodische Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$\sum_{s \in \mathbb{C}/\Lambda} \mathrm{res}_s(f) = 0$$

gilt.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Zeigen Sie:

1. Für jedes $s > 2$ konvergiert $\sum_{w \in \Lambda} \frac{1}{|w|^s}$.
2. Für jedes $n \geq 3$ liefert
$$z \longmapsto \sum_{w \in \Lambda} \frac{1}{(z-w)^n}$$
eine Λ-periodische meromorphe Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Insbesondere gibt es nach der dritten Aufgabe keine Λ-periodische meromorphe Funktion, die modulo Λ nur einen Pol besitzt, wenn dieser auch noch einfach ist, aber nach der vierten ist ein dreifacher möglich; mit dem Fall eines doppelten Pols beschäftigen wir uns nächste Woche.