Der Zettel ist dem Wachstum ganzer Funktionen $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ gewidmet.Ich schlage vor die ersten beiden oder die letzten beiden Aufgaben zu bearbeiten. Zur Erinnerung:

$$\mathrm{ord}(f)=\inf\{\mu>0 \mid \mathrm{M}_f(r)\le e^{r^\mu} \text{ für alle groß genugen } r>0\},$$

wo $\mathrm{M}_f(r)=\|f\|_{\partial\mathrm{D}(r)}$. Ziel der ersten Hälfte dieses Zettels ist es folgenden Satz zu beweisen:

Ist $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ eine ganze Funktion und $\alpha>0$ derart, dass für groß genuges $r>0$ und ein $c>0$

$$c\cdot r^\alpha \le \mathrm{n}_f(r)$$

gilt, so hat f mindestens Ordnung α; hier bezeichnet $\mathrm{n}_f:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{N}$ die Zählfunktion für die Nullstellen von f, also

$$\mathrm{n}_f(r)=\sum_{|z|<r}\mathrm{ord}_f(z).$$

Je dichter also die Nullstellen von f liegen, desto schneller muss $\mathrm{M}_f(r)=\|f\|_{\partial\mathrm{D}(r)}$ bei $r\to\infty$ wachsen.

Zunächst eine Verschärfung des Schwarz'schen Lemmas (welches genau der Fall $n=1$, $d_1=0$ ist):

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es sei $f:\mathrm{D}(1)\to\mathbb{C}$ holomorph und beschränkt, und $d_1,\dots,d_n\in\mathrm{D}(1)$ Nullstellen von f wobei jede Nullstelle x höchstens $\mathrm{ord}_x(f)$ mal gelistet ist. Dann gilt

$$|f(z)|\le|\mathrm{Möb}_{d_1}(z)|\cdot\dots\cdot|\mathrm{Möb}_{d_n}(z)|\cdot\|f\|_{\mathrm{D}(1)},$$

wo $\mathrm{Möb}_w:\mathrm{D}(1)\to\mathrm{D}(1)$ die biholomorphe Möbiustransformation

$$\mathrm{Möb}_w(z)=\frac{z-w}{\overline{w}z-1}$$

bezeichnet.
Hinweis: Betrachte Sie $\frac{f}{\mathrm{Möb}_{d_1}\cdot\dots\cdot\mathrm{Möb}_{d_n}}$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Folgern Sie die Jensen'sche Ungleichung, die insbesondere den Satz am Anfang des Zettels enthält: Für eine ganze Funktion f mit $f(0)\neq 0$ gilt

$$\int_0^r \frac{\mathrm{n}_f(t)}{t}\mathrm{d}t\le\ln\left(\frac{\mathrm{M}_f(r)}{|f(0)|}\right).$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass für eine Listung $d_1,\dots,d_n$ der Nullstellen von f in $\mathrm{D}(r)$

$$\int_0^r \frac{\mathrm{n}_f(t)}{t}\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^n\ln\left|\frac{r}{|d_k|}\right|$$

gilt.

Die zweite Hälfte berechnet die Ordnung einer ganzen Funktion aus ihren Taylorkoeffizienten.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es sei f eine ganze Funktion mit Taylorkoeffizienten a_k bei 0. Zeigen Sie, dass für ein $\alpha > 0$ die Ungleichung $\operatorname{ord}(f) \leq \alpha$ genau dann gilt, wenn für alle $\epsilon > 0$ die Folge

$$n \longmapsto n^{\frac{1}{\alpha+\epsilon}} \sqrt[n]{|a_n|}$$

beschränkt ist.

Hinweis: Für die Hinrichtung wende man die Cauchy'schen Abschätzungen an, um

$$\ln|a_n| \leq r^{\alpha+\epsilon} - n\ln(r)$$

zu erhalten und minimiere dann die rechte Seite. Für die Rückrichtung leite man

$$\mathrm{M}_f(r) \leq \sum_{n\geq 0} n^{\frac{-n}{\alpha+\epsilon}} c^n r^n,$$

für ein $c > 0$ her und teile diese Summe bei $(2cr)^{\alpha+\epsilon}$ auf. Der unendliche Teil der Summe lässt sich dann durch eine geometrische Reihe beschränken und der initiale durch $C(cr)^{(2cr)^{\alpha+\epsilon}} \cdot \sum_{n\geq 1} n^{\frac{-n}{\alpha+\epsilon}}$, was konvergiert.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Folgern Sie den Satz von Lindelöff und Pringsheim: Für eine ganze Funktion f mit $\mathrm{T}_0 f = \sum_{k\geq 0} a_k T^k$ gilt

$$\operatorname{ord}(f) = \limsup_{k\to\infty} -\frac{k\ln(k)}{\ln|a_k|},$$

wo alle Terme rechts mit $a_k = 0$ als 0 zu lesen seien.