

Funktionentheorie

Fabian Hebestreit

Contents

Kapitel 1. Holomorphe und analytische Funktionen	5
1. Die komplexen Zahlen	5
2. Offene Teilmengen von $\mathbb{C}$	12
3. Komplexe Differenzierbarkeit	14
4. Die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen	19
5. Potenzreihen	21

Holomorphe und analytische Funktionen

1. Die komplexen Zahlen

Der Ursprung der komplexen Zahlen liegt im Finden von Nullstellen von polynomiellen Gleichungen. Fangen wir einmal an einer Stelle an, die hoffentlich allen noch bekannt vorkommt, nämlich der von quadratischen Polynomen. Sei also K ein Körper aus dem die Koeffizienten des Polynoms stammen sollen. Da uns in dieser Vorlesung hauptsächlich der Fall $K = \mathbb{R}$ interessieren wird, nehmen wir der Einfachheit halber an, dass die Charakteristik von K nicht 2 ist, wir also jedes Element von K durch 2er Potenzen teilen können. Gegeben dann ein Polynom $F = T^2 + aT + b \in K[T]$, so versucht man das Finden der Nullstellen auf das Wurzelziehen zurückzuführen, indem man durch Betrachtung $F(T - x)$ für $x \in K$ versucht den linearen Term loszuwerden. Man rechnet

$F(T - x) = (T - x)^2 + a(T - x) + b = T^2 - 2xT + x^2 + aT - ax + b = T^2 + (a - 2x)T + x^2 - ax + b$,
sodass $x = a/2$ (hierfür die Annahme an die Charakteristik) das gewünschte leistet; nämlich

$$F(T - a/2) = T^2 - a^2/4 + b.$$

Da offenbar ein $n \in K$ eine Nullstelle von $F(T - a/2)$ ist, genau dann wenn $n - a/2$ eine Nullstelle von F , haben wir bewiesen:

1.1. Satz (Quadratische Ergänzung) *Es sei K ein Körper von Charakteristik ungleich 2. Dann hat ein quadratisches Polynom $F = T^2 + a \cdot T + b \in K[T]$ eine Nullstelle in K genau dann, wenn $a^2/4 - b$ eine Quadratwurzel r in K besitzt. In diesem Falle sind genau die Elemente*

$$r - \frac{a}{2} \quad \text{und} \quad -r - \frac{a}{2}$$

die Nullstellen von F .

Speziell im Falle der reellen Zahlen finden wir also:

1.2. Korollar *Ein quadratisches Polynom $F = T^2 + a \cdot T + b \in \mathbb{R}[T]$ hat eine reelle Nullstelle genau dann, wenn $a^2/4 - b \geq 0$. In diesem Falle sind genau die Elemente*

$$\sqrt{\frac{a^2}{4} - b} - \frac{a}{2} \quad \text{und} \quad -\sqrt{\frac{a^2}{4} - b} - \frac{a}{2}$$

die Nullstellen von F .

Ich hoffe es bedarf an dieser Stelle keiner Beispiele mehr um den Nutzen dieser Lösungsformeln zu demonstrieren; ihr Ursprung ist wohl nicht mehr zu klären, zuerst niedergeschrieben wurden sie wohl vom persischen Mathematiker al-Khwarismi im 9. Jahrhundert (dessen Werk auch das Wort Algebra geliefert hat) und ist seitdem wohl durchgängig in Benutzung.

Auch für kubische Polynome gibt es eine Lösungsformel, die in der Renaissance im 16. Jahrhundert in Italien gefunden wurde. Die Idee ist die gleiche wie vorher: Wir versuchen wieder durch Ersetzen von T durch $T - x$ die mittleren Koeffizienten eines kubischen Polynoms $F = T^3 + aT^2 + bT + c \in K[T]$ verschwinden zu lassen; der Einfachheit halber sei die Charakteristik nicht 2 oder 3. Etwas herumprobieren liefert zunächst:

1.3. Beobachtung Ist $F = T^3 + aT^2 + bT + c \in K[T]$ ein Polynom dritten Grades und $\text{char}(K) \neq 3$, so hat

$$F\left(T - \frac{a}{3}\right) = T^3 + \frac{3b - a^2}{3}T + \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{27}$$

immerhin keinen quadratischen Term mehr.

Wir können uns also daher direkt auf Polynome der Form $G = T^3 + pT + q \in K[T]$ beschränken um die Länge der Formeln etwas im Rahmen zu halten; den allgemeinen Fall kann man ja nun hierauf zurückführen. Machen wir uns also auf die Suche nach einer weiteren Substitution, die wir auflösen können. Für $t, x \in K$ haben wir

$$F(t-x) = (t-x)^3 + p(t-x) + q = t^3 - 3tx(t-x) - v^3 + p(t-x) + q = t^3 - x^3 - (3tx-p)(t-x) + q$$

Es gilt dann sicherlich $F(t-x) = 0$, falls

$$3tx - p = 0 \quad \text{und} \quad t^3 - x^3 + q = 0,$$

was man als Ansatz verfolgen kann (diese Umformung ist der wohl nicht-triviale Schritt den zu finden es mehrerer Jahrhunderte bedurfte!). Die erste Gleichung liefert uns $x = p/(3t)$ (solange $t \neq 0$, nehmen wir das also erst einmal an), was die zweite Gleichung in

$$t^3 - \frac{p^3}{27t^3} + q = 0$$

oder äquivalent

$$t^6 + qt^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$

überführt. Wundersamerweise ist das eine quadratische Gleichung in t^3 . Gemäß der quadratischen Ergänzung benötigen wir also ein Element $r \in K$ mit

$$r^2 = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$$

und dann ein $u \in K$ mit

$$u^3 = r - \frac{q}{2}.$$

Dann sollte $u - p/3u$ eine Nullstelle von G sein. Etwas umformuliert um zum Beispiel den Fall $t = 0$ mit abzudecken, erhält man:

1.4. Theorem (Cardano, del Ferro, Tartaglia, 1545) *Sei K ein Körper von Charakteristik nicht 2 oder 3 und $F = T^3 + pT + q \in K[T]$. Ist dann $r \in K$ mit*

$$r^2 = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$$

und $u, v \in K$ mit

$$u^3 = r - \frac{q}{2}, \quad v^3 = r + \frac{q}{2} \quad \text{und} \quad 3uv = p$$

so ist $u - v$ eine Nullstelle von F .

Benannt ist dieser Satz nach den Italienern Gerolamo Cardano (1501-1576), Scipione del Ferro (1465-1526) und Niccolo Tartaglia (1500-1557). Aber weit von Kollaborateuren, waren die drei sich nicht besonders wohlgesonnen: Cardano publizierte die Formel, die del Ferro und Tartaglia gefunden hatten, nach del Ferro's Tod und entgegen Tartaglia's expliziten Wunsch. Dieser hatte die Formel geheim gehalten um mit seiner Fähigkeit kubische Gleichungen zu lösen interlektuelle Duelle für sich entscheiden zu können. Das Zeitalter der Wissenschaft war eben noch nicht ganz recht eingeläutet. Cardano verdankt man übrigens auch die Binomialkoeffizienten und er war einer der ersten Mathematiker Europas, die ohne Scheu mit negativen Zahlen rechneten.

BEWEIS. Wir setzen einfach ein:

$$\begin{aligned} (u-v)^3 + p(u-v) + q &= u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3 + p(u-v) + q \\ &= u^3 - v^3 + (p-3uv)(u-v) + q = r - \frac{q}{2} - r - \frac{q}{2} + q = 0. \end{aligned}$$

□

1.5. Bemerkung (1) Gegeben eine Wahl von r reicht es eine der beiden dritten Wurzeln u und v zu ziehen, die andere kann man dann leicht ausrechnen: Im Falle $r = q/2$ folgt $p = 0$, und man kann v als beliebige dritte Wurzel von q wählen und $u = 0$. Und ist bei $r \neq q/2$ ein $u \neq 0$ einmal gewählt, so gilt

$$(3u)^3 \cdot \left(r + \frac{q}{2}\right) = 27 \cdot \left(r - \frac{q}{2}\right) \cdot \left(r + \frac{q}{2}\right) = 27 \cdot \left(r^2 - \frac{q^2}{4}\right) = 27 \cdot \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4}\right) = p^3$$

und damit ist $v = p/(3u)$ eine valide (und auch die einzig mögliche) Wahl für v .

- (2) Ersetzt man die Quadratwurzel r durch $-r$, und erfüllen u und v die Cardano'schen Bedingungen für r , so erfüllen $-v$ und $-u$ die von $-r$, was insgesamt den Wert von $u - v$ unverändert lässt. Das Ergebnis der ist also in gewisser Weise unabhängig von der gewählten Quadratwurzel r .
- (3) Ist weiter $1 \neq \xi \in K$ ein Element mit $\xi^3 = 1$, eine sogenannte dritte Einheitswurzel, so erfüllen mit (u, v) auch die Paare $(\xi \cdot u, \xi^2 \cdot v)$ und $(\xi^2 \cdot u, \xi \cdot v)$ die Cardano'schen Bedingungen, sodass wir in diesem Fall

$$u - v, \quad \xi \cdot u - \xi^2 \cdot v \quad \text{und} \quad \xi^2 \cdot u - \xi \cdot v$$

als drei Nullstellen eines kubischen Polynoms wie im Theorem oben erkennen.

In den Fall der reellen Zahlen übersetzt bedeutet die Lösungsformel aufgrund der Eindeutigkeit dritter Wurzeln in $\mathbb{R}$ einfach:

1.6. Korollar Ist $F = T^3 + pT + q \in \mathbb{R}[T]$ mit $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \geq 0$, so ist

$$\sqrt[3]{\sqrt[2]{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt[2]{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} + \frac{q}{2}}$$

eine Nullstelle von F .

Im Gegensatz zur quadratischen Ergänzung gibt es hier aber einen großen Haken: Gemäß des Zwischenwertsatzes hat *jedes* reelle kubische Polynom eine Nullstelle, aber obige Formel liefert sie nur unter der Zusatzannahme $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \geq 0$ (nachdem man die Transformation aus Beobachtung 1.3 durchgeführt hat). Die Bedingung ist aber auch offensichtlich notwendig um die Quadratwurzel in den reellen Zahlen wirklich ziehen zu können.

1.7. Beispiel Ein Beispiel für diese Diskrepanz liegt etwa im Fall der von Cardano berühmt gemachten Kubik $C = T^3 - 15T + 4 \in \mathbb{Z}[T]$ vor. Hier müssten wir für obige Formel in $\mathbb{R}$ eine Quadratwurzel aus $4^2/4 + (-15)^3/27 = -121$ ziehen können, was nicht möglich ist.

Ist K hingegen ein Körper der ein Element i enthält mit $i^2 = -1$ finden wir aber $(11 \cdot i)^2 = -121$. Zum Lösen der Cardano'schen Formel müssen wir also dann noch dritte Wurzeln aus

$$11 \cdot i - 2 \quad \text{und} \quad 11 \cdot i + 2$$

bestimmen. Es ist natürlich im Allgemeinen gar nicht so klar, ob und wie man solche Wurzeln ziehen kann, aber Cardano's Beispiel ist so konstruiert, dass es einfache Wurzeln gibt: Nämlich gelten

$$(-2 + i)^2 = -8 + 12 \cdot i + 6 - i = -2 + 11 \cdot i \quad \text{und} \quad (2 + i)^3 = 8 + 12 \cdot i - 6 - i = 2 + 11 \cdot i$$

und

$$3(-2 + i)(2 + i) = 3 \cdot (-4 - 1) = -15,$$

sodass $u = -2 + i$ und $v = 2 + i$ valide Wahlen für die Cardano'schen Formeln sind und wir lernen, dass überraschenderweise $u - v = 4$ eine Nullstelle von C ist.

Verifizieren, dass 4 eine Nullstelle von C ist kann man nun aber natürlich in jedem Körper (oder sogar in $\mathbb{Z}$) und damit haben wir auch für mittels der Cardano'schen Formeln eine reelle Nullstelle von C , obwohl wir die Cardano'sche Formel ja aber gar nicht anwenden durften.

Seltsamer noch: Enthält K auch noch eine Quadratwurzel d aus 3, so prüft man leicht, dass $\frac{-1+di}{2}$ eine dritte Einheitswurzel ist (wir werden uns mit den Einheitswurzeln in den Übungen beschäftigen). Damit lernen wir aus 1.5, dass auch

$$\left(\frac{-1+di}{2}\right) \cdot (-2+i) - \left(\frac{-1-di}{2}\right) \cdot (2+i) = \frac{1}{2} \cdot (2-i-2di-d+2+i+2di-d) = 2-d$$

und

$$\left(\frac{-1-di}{2}\right) \cdot (-2+i) - \left(\frac{-1+di}{2}\right) \cdot (2+i) = \frac{1}{2} \cdot (2-i+2di+d+2+i-2di+d) = 2+d$$

Nullstellen von C sind.

Und wieder kann man unproblematisch prüfen, dass etwa $2+\sqrt[3]{3}, 2-\sqrt[3]{3} \in \mathbb{R}$ wirklich Nullstellen von C sind, obwohl $\mathbb{R}$ kein Element i enthält, das die obige Berechnung möglich macht.

Die Cardano'sche Formel erlaubt also die Berechnung von Nullstellen kubischer Polynome offenbar auch, wenn sie rechtens gar nicht anzuwenden ist. Das war für Cardano und seine Zeitgenossen ein sehr überraschendes Phänomen, das sie den *casus irreducibilis* tauften. Sie nannten die manchmal auftauchenden Wurzeln aus negativen reellen Zahlen imaginäre Zahlen: Man musste sie sich nur vorstellen um mit ihrer Hilfe reelle Wurzeln (die es ja immer gibt!) zu finden. Eine Zahl, die sowohl einen reellen (hierher rührt wirklich auch der Namen für $\mathbb{R}$ als die "reellen", also "wirklichen" Zahlen) als auch einen imaginären Anteil hat (etwa $2+11 \cdot i$ in obigem Beispiel) nannten sie eine komplexe Zahl ("komplex" ist eine Transskription des griechischen Wortes für "zusammengesetzt"). Mittels des heutigen abstrakten Begriffs einer Zahl und insbesondere der Sprache der Körpertheorie ist es recht leicht das Rechnen mit solchen Objekte auf soliden Boden zu stellen. In jedem Körper K indem es eine Quadratwurzel i aus -1 gibt, gelten schließlich

$(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$ und $(a+bi) \cdot (c+di) = ac+bc i+adi+bdi^2 = (ac-bd)+(ad+bc)i$, was wir einfach zur Definition erheben:

1.8. Konstruktion Sei K ein Körper in dem -1 keine Quadratwurzel besitzt. Dann bezeichnen wir mit $K[i]$ denjenigen Körper mit unterliegender Menge K^2 , Addition $+: K[i] \times K[i] \rightarrow K[i]$ und Multiplikation $\cdot: K[i] \times K[i] \rightarrow K[i]$ gegeben durch

$$(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d) \quad \text{und} \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac-bd, ad+bc),$$

Nullelement $0 := (0, 0)$ und Einselement $1 := (1, 0)$. Die Verifikationen, dass die wirklich den Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetzen gehorchen und die beiden angegebenen Elemente wirklich ihre Rollen als neutrale Element einnehmen, sind hoffentlich schon in der linearen Algebra passiert (sie funktionieren auch für einen beliebigen kommutativen Ring R anstelle von K). Weiterhin prüft man auch leicht, dass

$$K \longrightarrow K[i], \quad k \longmapsto (k, 0)$$

ein injektiver Ringhomomorphismus ist, den wir von jetzt ab stillschweigend benutzen um K als Teilmenge von $K[i]$ zu identifizieren.

Setzen wir nun noch $i := (0, 1)$ so haben wir in der Tat $i^2 = -1$ und offenbar besitzt jedes Element $z \in K[i]$ eine eindeutige Darstellung

$$z = a + b \cdot i$$

mit $a, b \in K$; a heißt der *Realteil* und b der *Imaginärteil* von z , geschrieben $\text{Re}(z)$ and $\text{Im}(z)$. Sie liefern additive aber keineswegs multiplikative Abbildungen

$$\text{Re}, \text{Im}: K[i] \longrightarrow K.$$

Um zu sehen, dass K wirklich ein Körper ist, führen wir noch zwei weitere Funktionen ein. Die eine ist

$$q: K[i] \longrightarrow K, \quad z \longmapsto \text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2,$$

oftmals die *Norm* genannt. Sie erfüllt nach den binomischen Formeln $q(z \cdot w) = q(z) \cdot q(w)$ für alle $w, z \in K[i]$. Desweiteren gilt (und hier verwenden wir das erste und einzige mal die Annahme,

dass -1 keine Quadratwurzel in K besitzt) $q(z) \neq 0$ für alle $0 \neq z \in K[i]$: Ist nämlich etwa $\operatorname{Re}(z) \neq 0$ aber $q(z) = 0$, so folgt

$$\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right)^2 = \frac{\operatorname{Im}(z)^2}{\operatorname{Re}(z)^2} = \frac{-\operatorname{Re}(z)^2}{\operatorname{Re}(z)^2} = -1$$

was ja per Annahme nicht möglich ist, und analoges gilt bei $\operatorname{Im}(z) \neq 0$.

Die andere ist

$$\overline{(-)}: K[i] \longrightarrow K[i], \quad z \longmapsto \operatorname{Re}(z) - i \cdot \operatorname{Im}(z),$$

die *komplexe Konjugation*. Sie ist ein Ringhomomorphismus, wie sie hoffentlich ebenfalls schon gelernt haben, und es gelten

$$q(z) = z \cdot \bar{z}, \quad \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad i \cdot \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2}, \quad \bar{\bar{z}} = z$$

für alle $z \in K[i]$ und weiter $z = \bar{z}$ genau dann, wenn $z \in K$.

Für das Finden von Inversen rechnen wir damit für $z \neq 0$

$$z \cdot \frac{\bar{z}}{q(z)} = \frac{z\bar{z}}{q(z)} = 1$$

und damit $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{q(z)}$, oder mit anderen Worten

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i \cdot \frac{b}{a^2 + b^2},$$

für alle $a, b \in K$, solange $a \neq 0$ oder $b \neq 0$ gilt.

Wir werden uns in dieser Vorlesung im Wesentlichen auf folgenden Fall beschränken:

1.9. Definition Der Körper $\mathbb{C} := \mathbb{R}[i]$ heißt der Körper der *komplexen Zahlen*.

1.10. Bemerkung Natürlich können wir mittels obiger Konstruktion auch $\mathbb{Q}[i] \subseteq \mathbb{C}$ bilden, das ist vielleicht wenig spannend. Die Konstruktion hat aber noch mehr interessante Spezialfälle, die in der weiteren Vorlesung keine Rolle spielen werden. Im Körper $\mathbb{Z}/p$, $p \in \mathbb{N}$ prim, besitzt -1 genau dann eine Quadratwurzel, wenn $p = 2$ oder $p \equiv 1$ modulo 4 ist: Der Fall $p = 2$ ist hoffentlich klar. Für ungerades p gilt nach einem Satz von Wilson, dass

$$\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2 = \begin{cases} 1 & p \equiv 3 \text{ modulo } 4 \\ -1 & p \equiv 1 \text{ modulo } 4 \end{cases},$$

was die Quadratwurzel in den behaupteten Fällen liefert. Andersherum sagt, der kleine Satz von Fermat, dass $n^p \equiv n$ modulo p für jede natürliche Zahl n gilt, oder äquivalent $n^{p-1} \equiv 1$. Hat dann n eine Quadratwurzel r modulo p , so folgt sogar

$$n^{\frac{p-1}{2}} \equiv (r^2)^{\frac{p-1}{2}} = r^{p-1} \equiv 1.$$

Aber für $p \equiv 1$ modulo 4, etwa $p = 4k + 3$ haben wir

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} = (-1)^{\frac{4k+2}{2}} = (-1)^{2k+1} = -1 \neq 1$$

modulo p .

Für $p \equiv 3$ modulo 4, können wir also den Körper $\mathbb{Z}/p[i]$ bilden. Er hat p^2 Elemente und ebenfalls als Konsequenz des kleinen Satz von Fermat ist seine Konjugation genau der Frobeniushomomorphismus $x \mapsto x^p$: Es gilt schließlich

$$(a + bi)^p = a^p + b^p i^p = a + b i^{4k} i^3 = a - bi.$$

Diese Körper sind nach den $\mathbb{Z}/p$ selbst wohl die einfachsten endlichen Körper.

Von jetzt ab wollen wir also die komplexen Zahlen, und etwa das Wurzelziehen auf ihnen untersuchen. Dazu beobachten wir als allererstes noch, dass für $z \in \mathbb{C}$ die Norm $\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2$ immer eine nicht-negative reelle Zahl ist. Wir setzen

$$|z| := \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}.$$

Es gibt also $|a+bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$, mit anderen Worten wir haben es hier einfach mit dem euklidischen Abstand einer komplexen Zahl zur 0 zu tun. Insbesondere gilt die Dreiecksungleichung

$$|z + y| \leq |z| + |y|$$

für alle $y, z \in \mathbb{C}$ und weil sowohl Norm also auch das Ziehen von reellen Quadratwurzeln multiplikativ ist auch

$$|z \cdot y| = |z| \cdot |y|.$$

Zum Wurzelziehen eignet sich die folgende Polardarstellung von komplexen Zahlen, die nun wirklich nur noch im Fall $K = \mathbb{R}$ sinnig ist:

1.11. Satz *Zu jeder komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ existieren $r, \varphi \in \mathbb{R}$ mit $r \geq 0$, sodass*

$$z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)).$$

Die Zahl r ist durch $r = |z|$ eindeutig bestimmt, und falls $|z| \neq 0$ gilt, ist φ eindeutig bestimmt bis auf Addition von reellen Zahlen der Form $2\pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

BEWEIS. Ist $z = 0$ kann man natürlich $r = 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ beliebig wählen. Sei also von nun ab $z \neq 0$. Dann erfüllt $y = \frac{z}{|z|}$ die Gleichung

$$|y| = \left| \frac{z}{|z|} \right| = \frac{|z|}{|z|} = 1,$$

y liegt also auf dem Einheitskreis. Es ist nun hoffentlich bekannt, dass jedes Element $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ des Einheitskreises eine Darstellung der Form

$$a = \cos(\varphi) \quad \text{und} \quad b = \sin(\varphi)$$

für ein $\varphi \in \mathbb{R}$ besitzt und φ hierdurch eindeutig bestimmt ist bis auf Addition von ganzzahligen Vielfachen von 2π (der kleinsten Periode der Sinus- und Kosinusfunktion). Und umgekehrt, liegt wegen $\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2 = 1$ auch jeder Punkt $(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ auf dem Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$. Für $y = a + bi$ steht hier dann also genau

$$\frac{z}{|z|} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi).$$

Umrühren, fertig. □

Polarkoordinaten sind nicht besonders verträglich mit der Addition komplexer Zahlen (das ist ja aber mittels Real- und Imaginärteil zum Glück sehr einfach), eignen sich aber hervorragend um die Multiplikation komplexer Zahlen zu beschreiben. Für $r, r' \geq 0$ und $\varphi, \varphi' \in \mathbb{R}$ rechnen wir

$$\begin{aligned} r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) \cdot r'(\cos(\varphi') + i \sin(\varphi')) &= rr'((\cos(\varphi) \cos(\varphi') - \sin(\varphi) \sin(\varphi')) \\ &\quad + i(\cos(\varphi) \sin(\varphi') + \sin(\varphi) \cos(\varphi'))) \end{aligned}$$

und benutzen nun die Additionssätze für Sinus und Cosinus, die genau besagen, dass dieser Ausdruck sich zu

$$= rr'(\cos(\varphi + \varphi') + i \sin(\varphi + \varphi'))$$

vereinfacht.

Die Multiplikation mit der komplexen Zahl $z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$ dreht also eine gegebene komplexe Zahl y (gegen den Uhrzeigersinn!) um φ und streckt das Ergebnis noch um den Faktor r (oder auch andersherum). Zum Beispiel entsteht iz aus z einfach durch Rotation um $\pi/2$ (also 90°) gegen den Uhrzeigersinn. Formaler formuliert, beweist obige Rechnung zusammen mit 1.11:

1.12. Korollar *Die Abbildung*

$$\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad (r, \varphi) \longmapsto r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$$

ist ein Gruppenisomorphismus, wo $\mathbb{R}_{>0}$ und $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit ihren Multiplikationen und $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ mit der Addition als Gruppen aufgefasst seien.

Die Umkehrabbildung $\mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ schickt z auf $|z|$ in der ersten Koordinate und der Wert in der zweiten wird häufig als $\arg(z) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, das *Argument* oder sinnvoller den *Winkel* von z (zu 1), bezeichnet.

1.13. Korollar Für jede komplexe Zahl $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ mit $r \geq 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ und jedes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, ist

$$\sqrt[n]{r} \left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n}\right) \right)$$

eine n -te Wurzel von z .

Insbesondere besitzt jede komplexe Zahl eine n -te Wurzel.

Insbesondere kann man mithilfe der Cardano'schen Formel nun wirklich Nullstellen von Polynomen vom Grad 3 in $\mathbb{C}$ in etwa so gut bestimmen, wie man mit Sinus- und Cosinusfunktionen umgehen kann. Ähnliche Formeln gibt es übrigens auch noch für Polynome vom Grad 4, aber im Allgemeinen nicht mehr für höhere Grade. Das beweisen wir hier aber beides nicht, das Stichwort lautet Galois-Theorie.

1.14. Bemerkung Für $n = 2$ sind die Quadratwurzeln auch in algebraischen Termen recht leicht anzugeben: Ist etwa $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b \geq 0$, so ist

$$\sqrt[2]{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + \sqrt[2]{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \cdot i$$

eine Quadratwurzel aus z und bei $b \leq 0$ ist

$$\sqrt[2]{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} - \sqrt[2]{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \cdot i$$

eine, sowie natürlich jeweils die negativen dieser Ausdrücke.

Für höhere Wurzeln gibt es solche leichten Formeln nicht; auch das werden wir hier nicht beweisen, das Stichwort lautet wieder Galois-Theorie.

Es stellt sich nun noch folgendes Problem: Die Wurzel, die in 1.13 angegeben ist, hängt von der Wahl von φ in der Darstellung von z ab (in der Tat hat jedes $z \neq 0$ sogar n n -te Wurzeln, dazu mehr in den Übungen). Etwa gilt natürlich

$$\cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1 = \cos(3\pi) + i\sin(3\pi)$$

was die beiden Quadratwurzeln

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i \quad \text{und} \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -i$$

liefert.

Um eine n -te Wurzelfunktion $r: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ zu konstruieren, muss man also noch jeweils eine Wahl von Wurzel treffen, und hier gibt es ein böses Erwachen: Man kann diese Auswahl nicht stetig treffen! Wir werden das erst später beweisen, aber die Idee ist auch im Falle $n = 2$ jetzt schon leicht zu sehen. In diesem Fall muss r die natürlich 1 auf 1 oder -1 schicken. Sagen wir etwa es gilt $r(1) = 1$ (der andere Fall ist komplett analog). Wenn dann das Argument von r den Einheitskreis umläuft müssen wegen der Stetigkeit von r die Werte den halben Einheitskreis durchlaufen (r halbiert ja schließlich die Winkel). Aber am Ende des Kreiswegs kommt dann das Argument wieder beliebig nah an 1 heran, wohingegen die Werte nah an $-1 \neq r(1)$ heranlaufen (man male sich die Situation einmal auf!). Aber das ist bei einer stetigen Funktion natürlich unmöglich.

Gibt es in $\mathbb{R}$ also noch zu wenig Wurzeln um eine stetige Quadratwurzelfunktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zu erhalten, gibt es in $\mathbb{C}$ in gewisser Weise zu viele! Und schlimmer, obiges Argument funktioniert ebenso für n -te Wurzeln für beliebiges n , sodass sich selbst für ungerades n die ja vorhandene stetige Funktion $\sqrt[n]{\cdot}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sich nicht zu einer stetigen Wurzelfunktion $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ fortsetzen lässt.

Mit dem Problem die natürlichen Definitionsbereiche von Erweiterungen differenzierbarer reeller Funktionen zu komplex differenzierbaren komplexen Funktionen forzusetzen werden wir uns also bald beschäftigen.

2. Offene Teilmengen von $\mathbb{C}$

Bevor wir also zum Hauptbegriff dieses Kapitels kommen, müssen wir noch einen Moment lang den Begriff der offenen Teilmenge euklidischer Räume wiederholen, die als Definitionsbereich komplex differenzierbarer Funktionen dienen werden.

2.1. Definition Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *offen*, falls es für jedes $z \in U$ ein $\epsilon > 0$ gibt, sodass

$$D^n(z, \epsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |z - x| < \epsilon\}$$

noch vollständig in U enthalten ist. Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *abgeschlossen*, falls $\mathbb{R}^n \setminus A$ offen ist.

Ich hoffe diese Begriffe wurden in den Analysisvorlesungen gründlich untersucht. Wir sammeln hier nur einige Beispiele zusammen und führen etwas Notation ein.

2.2. Beispiel Das wohl einfachste (nicht-triviale) Beispiel sind die offenen Bälle $D^n(z, \epsilon)$ selbst: Ist $x \in D(z, \epsilon)$ so liefert die Dreiecksungleichung, dass

$$D^n(x, \epsilon - |x - z|) \subseteq D^n(z, \epsilon).$$

Man beobachte, dass für im Falle $n = 1$ für zwei reelle Zahlen $a < b$ einfach

$$(a, b) = D^1\left(\frac{b+a}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$$

gilt, sodass wir hier die Offenheit offener Intervalle abgehandelt haben. Der Fall $n = 2$ wird natürlich für uns der relevanteste sein, insbesondere werde ich hier auf den oberen Index 2 in der Notation verzichten und einfach $D(z, \epsilon) \subseteq \mathbb{C}$ schreiben. Besonders oft wird uns

$$D := D(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

begegnen, die *Einheitskreisscheibe*.

Ich erinnere an einige grundlegende Eigenschaften:

2.3. Lemma Jede Vereinigung offener Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ ist wieder offen und ebenso jeder endliche Durchschnitt.

Beliebige Durchschnitte offener Teilmengen sind natürlich nicht offen: Es gilt ja etwa $\{z\} = \bigcap_{\epsilon > 0} D(z, \epsilon)$.

2.4. Lemma Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, so ist auch $f^{-1}(V) \subseteq \mathbb{R}^n$.

2.5. Bemerkung (1) Falls Sie den Begriff schon kennen sagt das erste dieser beiden Lemmata zusammen mit der Tatsache, dass $\emptyset$ und $\mathbb{R}^n$ offensichtlich offen sind, genau, dass die offenen Menge eine Topologie auf $\mathbb{R}^n$ bilden.
 (2) Und natürlich gilt im zweiten auch folgende Umkehrung: Ist U offen, so ist eine Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ genau dann stetig, wenn das Urbild jeder offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ unter f offen ist.

2.6. Beispiel (1) Für nicht-negative reelle Zahlen $\lambda < \mu$ ist die Menge

$$A_{\lambda, \mu}^n = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \lambda < |z| < \mu\}$$

offen: Sie ist genau das Urbild des offenen Intervalls $(\lambda, \mu) \subset \mathbb{R}$ unter der stetigen Abbildung $|\cdot|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Für $n = 2$ heißt sie der Kreisring (um 0) mit Radien λ und μ .

(2) Für $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ und $a \in \mathbb{R}^n$ ist der Halbraum

$$H_{v,a}^n = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, z - a \rangle > 0\}$$

offen: Sie ist genau das Urbild des offenen Intervalls $(0, \infty) \subset \mathbb{R}$ unter der stetigen Abbildung $\langle v, (-) - a \rangle: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Es ist $H_{v,a}$ genau derjenige Halbraum im $\mathbb{R}^n$, der durch die Hyperebene

$$v^\perp + a = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, z - a \rangle = 0\},$$

die senkrecht zu v durch a verläuft, begrenzt wird und den Vektor $a + v$ enthält.

Wieder ist der Fall $n = 2$ natürlich am wichtigsten für diese Vorlesung und wieder lassen wir hier den oberen Index beiseite. In diesem (und natürlich auch wirklich nur in diesem) kann man die begrenzende Hyperebene (also einfach Gerade) auch direkt durch Angabe eines Vektors $0 \neq w \in v^\perp$ festzurren. Gemäß der Diskussion vor 1.12 entsteht $i \cdot v$ aus v durch Rotation um $\pi/2$ gegen den Uhrzeiger. Es gilt also insbesondere $iv \in v^\perp$, was sich auch für $v = a + bi$ durch die direkte Rechnungen

$$iv = -b + ai \quad \text{und} \quad \langle v, iv \rangle = \langle a + bi, -b + ai \rangle = a(-b) + ba = 0$$

ergibt. Wir setzen also

$$\text{LH}_{w,a} = \text{H}_{iw,a} \quad \text{und} \quad \text{RH}_{w,a} = \text{H}_{-iw,a};$$

es dann $\text{LH}_{w,a} \subseteq \mathbb{C}$ diejenige Halbebene von $\mathbb{C}$ die, wenn man von a aus in Richtung w schaut auf der linken Seite liegt. Wichtigstes Beispiel ist wohl

$$\text{H} := \text{LH}_{1,0} = \text{H}_{i,0} = \text{RH}_{-1,0} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\},$$

die *obere Halbebene*.

- (3) Für jedes $0 \neq v \in \mathbb{C}$ ist die in Richtung v geschlitzte Ebene

$$S_v = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists \lambda \geq 0 \text{ mit } z = \lambda v\}$$

offen: Es gilt schließlich

$$S_v = \text{H}_{-v,0} \cup \text{LH}_{v,0} \cup \text{RH}_{v,0}.$$

Wichtigstes Beispiel ist

$$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} = S_{-1}.$$

- (4) Für drei Elemente $x, y, z \in \mathbb{C}$ die nicht auf einer (reellen!) Geraden liegen, ist der Durchschnitt

$$\text{LH}_{z-y,y} \cap \text{LH}_{x-z,z} \cap \text{LH}_{y-x,x}$$

entweder das Innere oder das Äußere des Dreiecks mit Eckpunkten x, y, z , je nach Orientierung (vertauschen von zwei Ecken liefert genau den jeweils anderen Bereich). Insbesondere sind offene Menge, obwohl Vereinigungen von Scheiben in keinem Sinne "rund".

- (5) Ein ähnliches Beispiel ist für $v, w \in \mathbb{C}$, beide nicht 0, die Menge

$$C_{v,w} = \text{LH}_{v,0} \cap \text{RH}_{w,0}$$

der *Sektor* zwischen v und w . Wichtigstes Beispiel ist wohl

$$C_{1,i} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(z), \text{Im}(z) > 0\}$$

der erste Quadrant.

- (6) Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ offen (mit x ist schließlich auch $D(x, |z-x|)$ in $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ enthalten). Es ist also für jede endliche Menge $S \subseteq U$ mit $U \subseteq \mathbb{C}$ offen auch

$$U \setminus S = U \cap \bigcap_{s \in S} \mathbb{C} \setminus \{s\}$$

offen.

- (7) Aus den Formel für die Multiplikation komplexer Zahlen in 1.8 sieht man sofort, dass diese eine stetige Abbildung $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ ist. Insbesondere, ist wegen der Faktorisierung

$$U \xrightarrow{\Delta} U \times U \xrightarrow{f \times g} \mathbb{C} \times \mathbb{C} \xrightarrow{\cdot} \mathbb{C}$$

dann auch das Produkt stetiger Abbildungen $U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig (und die Summe stetiger Abbildungen natürlich sowieso). Ebenso ist die Inversionsabbildung $\mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ gemäß der Formel in 1.8 stetig.

Insbesondere folgt, dass für zwei komplexe Polynome $F, G \in \mathbb{C}[T]$, die zugehörige Abbildung

$$\frac{F}{G}: \mathbb{C} \setminus S \rightarrow \mathbb{C},$$

wo S die (endliche!) Menge der Nullstellen von G ist, stetig ist. Demzufolge ist $(F/G)^{-1}(U)$ für jedes offene $U \subseteq \mathbb{C}$ wieder offen, was uns nun schon völlig unübersichtlichen Zoo an Beispielen offener Teilmengen liefert.

Zuletzt erinnere ich noch an:

2.7. Lemma Für jedes $T \subseteq \mathbb{R}^n$ sind

$$T^\circ := \bigcup_{\substack{U \subseteq T \\ U \text{ offen}}} U \quad \text{und} \quad \bar{T} := \bigcap_{\substack{T \subseteq A \\ A \text{ abgeschlossen}}} A,$$

die größte offene Menge die in T enthalten ist beziehungsweise die kleinste abgeschlossene Menge, die T enthält.

2.8. Definition Der Rand einer Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^n$ ist $\partial T := \bar{T} \setminus T^\circ$.

Man findet etwa

$$\begin{aligned} \partial D(a, \epsilon) &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = \epsilon\}, & \partial A_{\lambda, \mu} &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \lambda\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \lambda\} \\ \partial H_{v, a} &= v^\perp + a \quad \text{und} \quad \partial L_{H_{w, a}} &= a + \mathbb{R} \cdot w = \partial R_{H_{w, a}}, \\ \partial S_v &= \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot v, & \partial(\mathbb{C} \setminus S) &= S \end{aligned}$$

und so weiter.

3. Komplexe Differenzierbarkeit

Wir kommen nun zum fundamentalen Begriff der Vorlesung.

3.1. Definition Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ und $z \in U$. Dann heißt f *komplex differenzierbar* bei z falls der Grenzwert der Funktion

$$U \setminus \{z\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad x \longmapsto \frac{f(x) - f(z)}{x - z}$$

an der Stelle z existiert. In diesem Fall setzen wir

$$f'(z) := \lim_{x \rightarrow z} \frac{f(x) - f(z)}{x - z},$$

genannt die *Ableitung* von f bei z .

Es heißt f *komplex differenzierbar* auf U , falls f bei jedem $z \in U$ komplex differenzierbar ist. In diesem Falle fügen sich die Ableitungen zu einer Funktion $f': U \rightarrow \mathbb{C}$ zusammen. Induktiv sagen wir dann für $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, dass f k -fach komplex differenzierbar auf U heißt, wenn f komplex differenzierbar auf U ist und f' $(k-1)$ -fach komplex differenzierbar auf U . Wir schreiben dann $f^{(k)}$ für die k -te Ableitung von f , formal induktiv definiert über

$$f^{(0)} = f \quad \text{und} \quad f^{(i+1)} = (f^{(i)})'$$

für $0 \leq i < k$.

Wir nennen f schließlich *holomorph*, wenn f für jedes $k \in \mathbb{N}$ k -fach komplex differenzierbar ist. Wir bezeichnen die Menge der holomorphen Funktion $U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\mathcal{O}(U)$.

Der Begriff der holomorphen Abbildung ist also das komplexe Analog einer glatten Abbildung $I \rightarrow \mathbb{R}$, wo $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall ist.

3.2. Bemerkung (1) Die Definition lässt sich auch wie folgt umformulieren, was oft etwas schönere Beweisformulierungen erlaubt: f ist komplex differenzierbar bei z , falls es eine Funktion $h: U \rightarrow \mathbb{C}$ gibt, derart dass

(a) $f(x) - f(z) = (x - z)h(x)$ für alle $x \in U$ und

(b) h ist stetig bei z ;

in diesem Fall gilt dann $h(z) = f'(z)$. Die erste Gleichung sagt nämlich genau, dass $h(x) = \frac{f(x) - f(z)}{x - z}$ für all $x \neq z$ gilt, was die zweite Bedingung genau in die Grenzwertbedingung aus unserer Definition übersetzt.

- (2) Setzt man nun $x = z + v$ für ein $v \in \mathbb{C}$, mit $|v| < \epsilon$ für $\epsilon > 0$ derart dass $D(z, \epsilon) \subseteq U$ (U ist ja offen!), folgt insbesondere, dass

$$\frac{|f(z+v) - f(z) - f'(z) \cdot v|}{|v|} = \left| \frac{v \cdot h(z+v) - h(z) \cdot v}{v} \right| = |h(z+v) - h(z)|$$

was bei $v \rightarrow 0$ wegen der Stetigkeit von h in z ebenfalls gegen 0 konvergiert. Da die Abbildung $f'(z) \cdot -: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ auch noch $\mathbb{R}$ -linear ist, besagt diese Rechnung genau: Wenn f bei z komplex differenzierbar ist, dann ist f bei z auch reell differenzierbar (als Funktion in zwei Variablen!) mit Differential

$$D_z f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

gegeben durch die komplexe Multiplikation mit $f'(z)$.

Insbesondere gelten für f alle Folgerungen, die in den Analysisvorlesungen für reell differenzierbare Abbildungen gemacht wurden. Etwa folgt sofort (das ist natürlich aber auch einfach direkt zu sehen), dass f stetig in z ist. Wir werden den Zusammenhang zwischen komplex differenzierbaren Funktion (in einer Variable) und reell differenzierbaren Funktionen (in zwei Variablen) im nächsten Abschnitt genauer untersuchen.

Um die Erinnerung an das Ableiten wachzurütteln, starten wir nun mit einigen einfachen expliziten Beispielen, nämlich den Funktionen $z \mapsto z^n$ für $n \in \mathbb{Z}$. Dafür erinnere ich zunächst einmal an die geometrische Summenformel: Für zwei komplexe Zahlen (oder beliebige kommutierende Elemente in irgendeinem Ring) x, z gilt:

$$\begin{aligned} (x - z) \cdot \sum_{k=0}^n x^k z^{n-k} &= \sum_{k=0}^n x^{k+1} z^{n-k} - \sum_{k=0}^n x^k z^{n-k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} x^k z^{n-k+1} - \sum_{k=0}^n x^k z^{n-k+1} \\ &= x^{n+1} - z^{n+1} \end{aligned}$$

wobei beim Übergang von der ersten in die zweite Zeile nur die linke Summe umindiziert wurde.

3.3. Bemerkung Die Wichtigkeit dieser Formel kann man wohl einfach nicht überbetonen: Zum Beispiel

- (1) im Falle $n = 1$ ist dies einfach die dritte binomische Formel $(x - z)(x + z) = x^2 - z^2$,
- (2) im Falle $x = 10$ und $z = 1$ besagt die Formel etwa für $n = 4$, dass

$$9 \cdot 1111 = 10000 - 1,$$

und analog für höheres n mit mehr Ziffern. Man mache sich klar, dass diese Erkenntnis unser Stellenwertsystem für das Schreiben natürlicher Zahlen, das wir heutzutage von Kindesbeinen an lernen und daher meist nicht mal mehr als Erfindung wahrnehmen, überhaupt erst ermöglicht. Insbesondere kann man x hier durch eine beliebige andere Zahl ersetzen (die Zahl 10 benutzen wir wohl nur wegen der Geometrie unserer Hände so gern), etwa liefert diese Formel für $x = 2$ das Binärsystem!

- (3) Im Falle $z = 1$ liefert die umgestellte Formel $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ die Konvergenz der geometrischen Reihe für reelle (und natürlich nun auch komplexe!) Zahlen x mit $|x| < 1$ zu

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} x^k,$$

insbesondere das berühmte

$$1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \cdots = \frac{n}{n-1}$$

für $n \in \mathbb{N}$.

- (4) Zum Beweis in der linearen Algebra, dass das charakteristische Polynom $\chi_A \in \mathbb{C}[T]$ einer $(n \times n)$ -Matrix A , die n te Potenz des Minimalpolynoms $\min_A \in \mathbb{C}[T]$ teilt, kann man zunächst bemerken, dass

$$\min_A^n = \det(\mathbb{I}_n \cdot \min_A) = \det(\min_A(\mathbb{I}_n \cdot T) - \min_A(A))$$

gilt. Bei $\min_A = \sum_{k=0}^m c_k T^k$ schreibt sich die hierauftauchende Matrix dann zu

$$\sum_{k=0}^m c_k ((\mathbb{I}_n \cdot T)^k - A^k)$$

um, und auf jeden dieser Summanden kann man die geometrische Summenformel (mit $x = \mathbb{I}_n \cdot T$ und $y = A$) anwenden, um mit $B_k = \sum_{l=0}^{k-1} A^l \cdot T^{k-l-1}$

$$(\mathbb{I}_n \cdot T)^k - A^k = (\mathbb{I}_n \cdot T - A) \cdot B_k$$

zu erhalten. Der Beweis geht dann mit der Rechnung

$$\begin{aligned} \min_A^n &= \det(\min_A(\mathbb{I}_n \cdot T) - \min_A(A)) \\ &= \det \left(\sum_{k=0}^m c_k ((\mathbb{I}_n \cdot T)^k - A^k) \right) \\ &= \det \left((\mathbb{I}_n \cdot T - A) \cdot \sum_{k=0}^m c_k B_k \right) \\ &= \chi_A \cdot \det \left(\sum_{k=0}^m c_k B_k \right) \end{aligned}$$

zu Ende.

Und auch das Ableiten von Polynomen ist eine direkte Konsequenz (und die Liste damit bei weiten nicht ausgeschöpft).

3.4. Beispiel (1) Betrachte für $n \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$p_n: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto z^n.$$

Um ihre Differenzierbarkeit bei $z \in \mathbb{C}$ nachzuweisen, betrachte

$$h_z: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad x \longrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} x^k z^{n-1-k}.$$

Dann ist h_z als komplexes Polynom gemäß der Diskussion in 2.6 überall stetig und wir haben

$$(x - z) \cdot h_z(x) = z^n + (x - z) \sum_{k=0}^{n-1} x^k z^{n-1-k} = x^n - z^n = p_n(x) - p_n(z)$$

eben genau wegen der geometrischen Summenformel. Nach 3.2 folgt also, dass p_n bei z komplex differenzierbar ist mit

$$f'_n(z) = h_z(z) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k z^{n-1-k} = n z^{n-1}.$$

- (2) Betrachte für $n \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$q_n: \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto \frac{1}{z^n}.$$

Um ihre Differenzierbarkeit bei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nachzuweisen, gehen wir genau wie im vorigen Beispiel vor und betrachten

$$h_z: \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad x \longmapsto - \sum_{k=0}^{n-1} x^{k-n} z^{-k-1}$$

und rechnen dann wieder mittels geometrischer Summenformel

$$\begin{aligned}(x-z)h_z(x) &= (z-x) \sum_{k=0}^{n-1} x^{k-n} z^{-k-1} = \frac{(z-x) \sum_{k=0}^{n-1} x^k z^{n-1-k}}{x^n z^n} \\ &= \frac{z^n - x^n}{x^n z^n} = \frac{1}{x^n} - \frac{1}{z^n} = q_n(x) - q_n(z).\end{aligned}$$

Da h_z wieder nach 2.6 in ihrem gesamten Definitionsbereich stetig ist, ist nach 3.2 q_n in z komplex differenzierbar mit

$$q'_n(z) = h_z(z) = - \sum_{k=0}^{n-1} z^{k-n} z^{-k-1} = - \sum_{k=0}^{n-1} z^{-1-n} = \frac{-n}{z^{n+1}}.$$

- (3) Die komplexe Konjugation $\overline{(-)}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist nirgends komplex differenzierbar: Für $\epsilon > 0$ haben wir

$$\frac{\overline{z+\epsilon} - \overline{z}}{\overline{z+\epsilon} - \overline{z}} = \frac{\epsilon}{\epsilon} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{\overline{z+\epsilon i} - \overline{z}}{\overline{z+\epsilon i} - \overline{z}} = \frac{-\epsilon i}{\epsilon i} = -1$$

Es gibt also beliebig nahe an z komplexe Zahlen x für die der Quotient $\frac{\overline{x}-\overline{z}}{x-z}$ die Werte 1 und -1 annimmt, insbesondere kann er für $x \rightarrow z$ keinen Grenzwert annehmen.

Man beachte, dass die komplexe Konjugation als Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ einfach durch

$$(x, y) \mapsto (x, -y)$$

was natürlich eine sowas von glatte Abbildung ist. Komplexe Differenzierbarkeit ist also eine strikt stärkere Bedingung als bloß reelle Differenzierbarkeit. Wir untersuchen den Zusammenhang im nächsten Abschnitt.

Wir sammeln noch schnell die üblichen Rechenregeln zusammen:

3.5. Lemma (Kettenregel) Sind $U, V \subseteq \mathbb{C}$ offen und $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $g(U) \subseteq V$ komplex differenzierbar bei z in U und $f: V \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar bei $g(z)$, so ist auch $f \circ g: U \rightarrow \mathbb{C}$ in z komplex differenzierbar mit

$$(f \circ g)'(z) = f'(g(z)) \cdot g'(z).$$

Der Beweis ist eine Übung.

3.6. Lemma Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f, g: U \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in $z \in U$. Dann sind auch

- (1) $f + g: U \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in z mit

$$(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z),$$

- (2) $f \cdot g: U \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in z mit

$$(f \cdot g)'(z) = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z),$$

und

- (3) falls $g(U) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt, ebenso $\frac{f}{g}: U \rightarrow \mathbb{C}$ in z komplex differenzierbar mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z) \cdot g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}.$$

BEWEIS. Sind $h: U \rightarrow \mathbb{C}$ und $k: U \rightarrow \mathbb{C}$ Zeugen der Differenzierbarkeit von f beziehungsweise g gemäß 3.2, so haben wir

$(f+g)(x) - (f+g)(z) = f(x) - f(z) + g(x) - g(z) = (x-z)h(x) + (x-z)k(x) = (x-z) \cdot (h+k)(x)$ sodass aus der Stetigkeit von $h+k$ bei z die komplexe Differenzierbarkeit von $f+g$ bei z folgt mit

$$(f+g)'(z) = (h+k)(z) = h(z) + k(z) = f'(z) + g'(z)$$

wie gewünscht.

Ähnlich haben wir

$$(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(z) = f(x)g(x) - f(x)g(z) + f(x)g(z) - f(z)g(z) = f(x)(g(x) - g(z)) + g(z)(f(x) - f(z))$$

$$= f(x)(x-z)k(x) + g(z)(x-z)h(x) = (x-z) \cdot (f(x)k(x) + g(z)h(x)),$$

sodass die Stetigkeit von $x \mapsto f(x)k(x) + g(z)h(x)$ bei z die komplexe Differenzierbarkeit von $f \cdot g$ bei z bezeugt mit

$$(f \cdot g)'(z) = f(z)k(z) + g(z)h(z) = f(z)g'(z) + g(z)f'(z)$$

wie gewünscht.

Die dritte Formel kann man analog nachweisen, aber sie folgt nun wie üblich auch aus der zweiten und der Kettenregel: Die Funktion $\frac{1}{g}: U \rightarrow \mathbb{C}$ ist die Komposition von

$$U \xrightarrow{g} \mathbb{C} \setminus \{0\} \xrightarrow{\frac{1}{\cdot}} \mathbb{C},$$

sodass die Differenzierbarkeit schon aus dem bisher bewiesenen (inklusive 3.4) folgt, mit

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(z) &= f(z) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'(z) + f'(z) \cdot \frac{1}{g(z)} = f(z) \cdot \frac{-1}{g(z)^2} \cdot g'(z) + \frac{f'(z)}{g(z)} \\ &= \frac{f'(z) \cdot g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2} \end{aligned}$$

wie gewünscht. □

Zusammen mit 3.4 erhalten wir:

3.7. Korollar Für je zwei Polynome $F, G \in \mathbb{C}[T]$ mit $G \neq 0$ ist die Funktion

$$\frac{F}{G}: \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C},$$

wo S die (endliche!) Menge der Nullstellen von G ist, holomorph.

Etwas tiefer liegt:

3.8. Satz Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ injektiv und in U stetig komplex differenzierbar mit $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in U$. Dann ist $V := f(U) \subseteq \mathbb{C}$ ebenfalls offen und $f^{-1}: V \rightarrow \mathbb{C}$ stetig komplex differenzierbar auf V mit

$$(f^{-1})'(z) = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))}$$

für alle $z \in V$.

Den Beweis verschiebe ich noch kurz in den nächsten Abschnitt. Die Hauptschwierigkeit liegt tatsächlich im Nachweis, dass V überhaupt offen ist. Anstatt dies komplett von neuem zu beweisen, werden wir uns einfach des Satzes von der Umkehrfunktion aus der reellen Analysis bedienen. Dieser erzwingt die Annahme der stetigen Differenzierbarkeit; obiger Satz gilt wortwörtlich aber auch für beliebige komplex differenzierbare Funktionen. Anstatt diese Annahme nun mit etwas Aufwand zu beseitigen, werden wir das einfach später aus allgemeineren Resultaten über komplex differenzierbare Funktionen folgern.

Als Anwendung erhalten wir zum Beispiel:

3.9. Korollar Auf jedem Schlitzgebiet S_v für $0 \neq v \in \mathbb{C}$ existiert eine komplex differenzierbare Quadratwurzelfunktion $r: S_v \rightarrow \mathbb{C}$ mit $r'(z) = \frac{1}{2r(z)}$.

Ich erinnere noch einmal daran, dass es eine stetige Wurzelfunktion auf keiner echt größeren Menge geben kann!

BEWEIS. Man prüft leicht, dass für jede Wurzel $w \in \mathbb{C}$ von v die Funktion

$$q: \text{LH}_{w,0} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto z^2$$

die Voraussetzungen von 3.8 erfüllt und $q(\text{LH}_{w,0}) = S_v$ gilt. Umrühren, fertig. □

4. Die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen

Wir vergleichen nun den Begriff der reellen Differenzierbarkeit mit dem der komplexen. Dafür wiederhole ich einmal schnell erstein:

4.1. Definition Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $z \in U$. Dann heißt f (reell) differenzierbar in z , wenn es eine $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ existiert, derart dass

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{|f(z+v) - f(z) - T(v)|}{|v|} = 0.$$

So eine $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung ist dann eindeutig bestimmt, wird $D_z f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ notiert und heißt das *Differential* von f . Es ist dann für $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ und klein genug $\epsilon > 0$ auch die Funktion

$$(-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad \lambda \longmapsto f(z + \lambda \cdot v)$$

definiert und in 0 differenzierbar; allgemein heißt f bei z in Richtung v differenzierbar, wenn diese Funktion differenzierbar ist. Die Ableitung in 0 heißt daher auch die *Richtungsableitung* von f bei z in Richtung v , geschrieben $(\partial_v f)(z) \in \mathbb{R}^m$. Für $v = e_i$ nennen wir dies $(\partial_i f)(z)$. Für die Matrix, die $D_z f$ bezüglich der Standardbasis repräsentiert, gilt dann

$$\begin{pmatrix} (\partial_1 f_1)(z) & \dots & (\partial_n f_1)(z) \\ \vdots & & \vdots \\ (\partial_1 f_m)(z) & \dots & (\partial_n f_m)(z) \end{pmatrix} \in \text{Mat}(n, m, \mathbb{R}).$$

Uns interessiert natürlich der Fall $n = 2 = m$.

Wir hatten schon in 3.2 bemerkt, dass dann jede in z komplex differenzierbare Abbildung auch reell differenzierbar ist mit

$$(D_z f)(w) = f'(z) \cdot w$$

für alle $w \in \mathbb{C}$ und die zu $D_z f$ gehörige Matrix bezüglich der $\mathbb{R}$ -Basis $1, i$ durch

$$\begin{pmatrix} [\partial_1 \text{Re}(f)](z) & [\partial_2 \text{Re}(f)](z) \\ [\partial_1 \text{Im}(f)](z) & [\partial_2 \text{Im}(f)](z) \end{pmatrix}$$

gegeben.

Nun ist die Komposition des Ringhomomorphismus

$$\iota: \mathbb{C} \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \subseteq \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}), \quad z \longmapsto (z \cdot -),$$

dessen erste Abbildung natürlich bijektiv ist, mit der Identifikation

$$\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \cong \text{Mat}(2, 2, \mathbb{R}),$$

die von $\mathbb{R}$ -Basis $i, 1$ von $\mathbb{C}$ induziert wird, (gemäß einer Übung) durch

$$a + bi \longmapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

für $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben. Insbesondere erhalten wir:

4.2. Satz Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ und $z \in U$. Dann ist f bei z komplex differenzierbar genau dann, wenn f bei z reell differenzierbar ist und

$$D_z f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$\mathbb{C}$ -linear ist, was genau dann der Fall ist, wenn

$$[\partial_1 \text{Re}(f)](z) = [\partial_2 \text{Im}(f)](z) \quad \text{und} \quad [\partial_2 \text{Re}(f)](z) = -[\partial_1 \text{Im}(f)](z)$$

gilt.

Diese Gleichungen heißen die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen. Damit stehen uns nun wirklich die Sätze über reell differenzierbare Funktionen (in zwei Variablen!) zur Verfügung. Wir sehen aber zum Beispiel auch, dass für eine reell stetig differenzierbare Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, die Menge der Punkte in denen f komplex differenzierbar ist, eine abgeschlossene Menge ist. Man kann also solche Abbildung nicht einfach zu auf offenen Mengen komplex differenzierbaren Abbildungen einschränken.

4.3. Beispiel Die vier wahrscheinlich recht gleich aussehenden Abbildungen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, die (x, y) auf

$$(x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3), \quad (x^3 + 3xy^2, 3x^2y + y^3), \quad (x^3 + 3xy^2, -3x^2y - y^3), \quad (x^3 - 3xy^2, -3x^2y + y^3)$$

schicken, haben in $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ die Ableitungen

$$\begin{pmatrix} 3a^2 - 3b^2 & -6ab \\ 6ab & 3a^2 - 3b^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3a^2 + 3b^2 & 6ab \\ 6ab & 3a^2 + 3b^2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 3a^2 + 3b^2 & -6ab \\ 6ab & -3a^2 - 3b^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3a^2 - 3b^2 & -6ab \\ -6ab & -3a^2 + 3b^2 \end{pmatrix}.$$

Wir lesen ab, dass genau die erste überall komplex differenzierbar ist (sie ist einfach $z \mapsto z^3$ in Koordinaten ausgeschrieben). Die zweite ist genau an den Punkten mit $a = 0$ oder $b = 0$ (also dem Achsenkreuz) komplex differenzierbar, die dritte und vierte (sie ist $z \mapsto \bar{z}^3$ in Koordinaten ausgeschrieben) nur im Nullpunkt.

Aus dem Vergleich von partieller und totaler Differenzierbarkeit in der reellen Analysis lernen wir auch direkt:

4.4. Korollar Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ so ist f auf U stetig komplex differenzierbar genau dann, wenn $\operatorname{Re}(f)$ und $\operatorname{Im}(f)$ auf U stetig und stetig partiell differenzierbar sind und die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen erfüllen.

Genau wie im reellen kann man um von partieller Differenzierbarkeit auf totale zu schließen nicht auf die Stetigkeit verzichten. Ein Beispiel werden wir in den Übungen sehen.

Die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen schränken das Verhalten komplex differenzierbarer Funktionen stark ein. Zum Beispiel sieht man sofort:

4.5. Korollar Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, so ist f lokal konstant.

PROOF. Es gelten dann schließlich $\partial_1 \operatorname{Re}(f) = \partial_2 \operatorname{Im}(f) = 0$ und $\partial_2 \operatorname{Re}(f) = -\partial_1 \operatorname{Im}(f) = 0$, sodass die Matrix die f' beschreibt aus Nullen besteht. Aber damit verschwinden auch alle Richtungsableitungen von f , sodass für jedes $z \in U$ und $D(z, \epsilon) \subseteq U$ und $v \in \mathbb{C}$ mit $|v| = 1$ die Funktion

$$(-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \lambda \longmapsto f(z + \lambda v)$$

konstant ist. Aber dann ist sicherlich auch die Einschränkung von f auf $D(z, \epsilon)$ konstant. $\square$

4.6. Korollar Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ offen so ist eine zweifach stetig differenzierbare Funktion $g: U \rightarrow \mathbb{R}$ nur dann der Real- oder Imaginärteil einer komplex differenzierbaren Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, wenn g harmonisch ist, also wenn

$$\partial_1 \partial_1 g + \partial_2 \partial_2 g = 0$$

gilt.

PROOF. Wegen $\partial_1 \operatorname{Im}(f) = \partial_2 \operatorname{Re}(f) = \partial_2 g$ und $\partial_2 \operatorname{Im}(f) = -\partial_1 \operatorname{Re}(f) = \partial_1 g$ ist auch $\operatorname{Im}(f)$ zweimal stetig differenzierbar. Aber dann rechnen wir

$$\partial_1 \partial_1 \operatorname{Re}(f) = \partial_1 \partial_2 \operatorname{Im}(f) = \partial_2 \partial_1 \operatorname{Im}(f) = -\partial_2 \partial_2 \operatorname{Re}(f),$$

wo wir außen die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen und innen den Satz von Schwarz über die Vertauschbarkeit von Richtungsableitungen angewandt haben (dafür auch die Stetigkeitsannahme an die zweiten Ableitungen von g). $\square$

Und zum Schluss noch der Beweis von 3.8, den wir im letzten Kapitel verschoben hatten. Hierfür erinnere ich an den Umkehrsatz, wohl einer der Hauptsätze aus der reellen Analysis:

4.7. Theorem Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $z \in U$ derart $D_z f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ invertierbar ist. Dann existiert ein offenes $W \subseteq U$ mit $z \in W$ so, dass

- (1) die Einschränkung $f: W \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist injektiv,
- (2) das Differential $D_z f$ ist invertierbar für alle $z \in W$,
- (3) die Menge $V := f(W) \subseteq \mathbb{R}^n$ ist offen,

- (4) die inverse Abbildung $f^{-1}: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist stetig differenzierbar, und
 (5) es gilt $D_z f^{-1} = (D_{f^{-1}(z)} f)^{-1}$.

Ist insbesondere $D_x f$ sogar für alle $x \in U$ invertierbar, so schickt f beliebige offene Teilmengen von U auf offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.

Dieser Satz gilt tatsächlich auch mit der schwächeren Annahme, dass f nur differenzierbar ist (und dann ist auch f^{-1} nur differenzierbar), aber der Beweis, der üblicherweise in den Analysisvorlesungen gegeben wird (mittels Banach'schem Fixpunktsatz) bedarf der Stetigkeit.

Wir erhalten also auch:

4.8. Korollar Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig komplex differenzierbar und $z \in U$ mit $f'(z) \neq 0$ so gibt es ein offenes $W \subseteq U$ mit $z \in W$ derart, dass $f: W \rightarrow \mathbb{C}$ injektiv ist.

Es bleibt nur zu beobachten, dass bei $f'(z) \neq 0$ die Multiplikation mit $f'(z)$ als Abbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ natürlich invertierbar ist mit Inversem gegeben durch die Multiplikation mit $\frac{1}{f'(z)}$.

BEWEIS VON 3.8. Aus dem Umkehrsatz lernen wir also sofort, dass $v = f(U)$ offen ist. Und ist nun $w = f(z)$ in $V = f(U)$, und $z \in W \subseteq U$ eine Teilmenge wie im Umkehrsatz, so folgt, dass $f^{-1}: f(W) \rightarrow \mathbb{C}$ reell stetig differenzierbar ist mit

$$D_z f^{-1} = (D_{f^{-1}(z)} f)^{-1},$$

was natürlich das gleiche für die gesamte Umkehrabbildung $f^{-1}: V \rightarrow \mathbb{C}$ liefert. Aber nach unserer Vorüberlegung ist dieses Inverse genau durch die Multiplikation mit $\frac{1}{f'(z)}$, insbesondere komplex linear. Es folgt daher aus 4.2, dass f^{-1} auch stetig komplex differenzierbar ist mit

$$(f^{-1})'(z) = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))},$$

wie gewünscht. □

5. Potenzreihen

Als dann wollen wir uns die nächste Beispielklasse holomorpher Funktionen nach den rationalen Funktionen erarbeiten, nämlich Funktionen die sich durch Potenzreihen beschreiben lassen.

Hierzu erweitern wir zunächst einmal die Definition eines (formalen) Polynoms. Man erinnere sich an die lineare Algebra zurück, dass für einen Körper K eine polynomielle Funktion $p: K \rightarrow K$ eine Funktion ist, für die ein $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, \dots, a_n \in K$ existieren mit

$$p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$$

für alle $z \in K$, wohingegen ein (formales) Polynom einfach eine Folge $F: \mathbb{N} \rightarrow K$ ist mit der Eigenschaft, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $F_k = 0$ für alle $k > n$. Die Polynome bilden einen kommutativen Ring $K[T]$ unter komponentenweise Addition und Faltung (manchmal auch Cauchy-Produkt genannt), also

$$(F + G)_n = F_n + G_n \quad \text{und} \quad (F \cdot G)_n = \sum_{k=0}^n F_k \cdot G_{n-k}.$$

Diese sind gerade so gemacht, dass die Abbildung

$$\iota: K[T] \rightarrow F(K, K), \quad F \mapsto \left[z \mapsto \sum_{k \geq 0} F_k \cdot z^k \right],$$

die einem Polynom die zugehörige polynomielle Funktionen zuordnet, ein Ringhomomorphismus ist (man beachte, dass nur endlich viele Terme in der Summe auf der rechten Seite nicht Null sind, sodass hier in Wahrheit eine endliche Summe steht!). Es sind dann

$$(0, 0, 0, \dots) \quad \text{und} \quad (1, 0, 0, 0, \dots)$$

das Null- und das Einselement von $K[T]$ und die Abbildung

$$K \rightarrow K[T], \quad k \mapsto (k, 0, 0, 0, \dots)$$

ist ein injektiver Ringhomomorphismus, den man benutzt um K als Teilmenge von $K[T]$ aufzufassen. Zum Schluss setzt man noch

$$T = (0, 1, 0, 0, 0, \dots)$$

und erhält dann, dass

$$(T^n)_k = \begin{cases} 1 & k = n \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

sodass die Elemente $1, T, T^2, \dots$ eine K -Basis von $K[T]$ bilden, und für $F \in \mathbb{C}[T]$ mit $F_k = 0$ für $k > n$ wirklich

$$F = \sum_{k=0}^n F_k \cdot T^k$$

gilt. Das kleinst mögliche n mit dieser Eigenschaft heißt dann der Grad von F .

Ist K unendlich so beweist man in der linearen Algebra, dass die Abbildung, die einem Polynom seine polynomielle Abbildung zuordnet injektiv ist, sodass man in diesen Fällen (so auch wie wir bisher) nicht zwischen polynomiellen Funktionen und (formalen) Polynomen unterscheiden muss. Für endliche Körper K muss man das aber schon, etwa damit das charakteristische Polynome einer $(n \times n)$ -Matrix über K auch wirklich Grad n hat: Die Einheitsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(2, 2, \mathbb{Z}/2)$$

hat charakteristisches Polynom $(T - 1)^2 = T^2 + 1 \in \mathbb{Z}/2[T]$, aber die hierzu assoziierte Funktion $\mathbb{Z}/2 \rightarrow \mathbb{Z}/2$, stimmt mit der zum linearen Polynom $T + 1 \in \mathbb{Z}/2[T]$ assoziierten Funktion überein: Beide schicken 0 auf 1 und 1 auf 0.

Für Potenzreihen muss man die Unterscheidung zwischen formalen Potenzreihen und durch Potenzreihen definierten Funktionen auch für Körper wie $\mathbb{C}$ machen. Wir setzen daher erst einmal:

5.1. Definition Eine *formale Potenzreihe* über einem Körper K ist einfach eine Folge $F: \mathbb{N} \rightarrow K$. Wir geben der Menge $K[[T]] := F(\mathbb{N}, K)$ von solchen Folgen wieder die komponentenweise Addition und also Multiplikation die Faltung, also

$$(F + G)_n = F_n + G_n \quad \text{und} \quad (F \cdot G)_n = \sum_{k=0}^n F_k \cdot G_{n-k}.$$

Den Nachweis, dass dies wirklich ein kommutativer Ring ist, ist der gleiche wie beim Polynomring, ich überspringe ihn daher einmal. Offensichtlich ist nun hoffentlich, dass wir Ringinklusionen

$$K \subseteq K[T] \subseteq K[[T]]$$

haben.

5.2. Bemerkung In Analogie mit der Situation für Polynome notiert man häufig auch eine formale Potenzreihe $F \in K[[T]]$ durch $\sum_{k \geq 0} F_k T^k$, wobei es sich hierbei (erst einmal) wirklich nur um eine Schreibweise handelt: Für eine echte Potenzreihe steht hier nämlich keine endliche Summe, die sich tatsächlich ausführen ließe!

Nun zum Spezialfall $K = \mathbb{C}$ zurück und der Frage der Konvergenz einer Potenzreihe. Die fundamentale Beobachtung ist folgendes Kriterium von Abel:

5.3. Lemma Sei $F \in \mathbb{C}[[T]]$ eine formale Potenzreihe und $M \geq 0$, $b > 0$ reelle Zahlen derart, dass

$$|F_k| \leq M t^k$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Dann konvergiert für jedes $0 < s < \frac{1}{b}$ die Reihe $\sum_{k \geq 0} \|F_k(-)^k\|_{D(s)}$.

Hier bezeichnet für eine beschränkte Funktion $f: T \rightarrow \mathbb{R}^n$, T irgendeine Menge, wie üblich die Supremumsnorm von f , also

$$\|f\|_T = \sup\{|f(t)| \mid t \in T\}.$$

Um ihre Relevanz zu erklären erinnere ich direkt auch an die folgenden zwei Sätze aus den Analysisvorlesungen:

- (1) Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f: \mathbb{N} \rightarrow F(U, \mathbb{R}^m)$ ein Folge von Funktionen auf U und $g: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ derart, dass $g - f_k: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ beschränkt ist und

$$\|g - f_k\|_U \longrightarrow 0 \quad \text{bei} \quad k \longrightarrow \infty,$$

so konvergiert f gleichmäßig gegen g . Insbesondere gilt für jedes $z \in U$, dass $f_k(z) \rightarrow g(z)$ bei $k \rightarrow \infty$.

- (2) Konvergiert eine Funktionenfolge $f: \mathbb{N} \rightarrow C(U, \mathbb{R}^m)$ stetiger Funktionen gleichmäßig gegen ein $g: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, so ist auch g stetig.

Wir können wir nun also beide gleich anwenden.

PROOF. Da aus $z \in D(s)$ sicherlich $|F_k \cdot z^k| \leq |F_k| \cdot s^k$ folgt, haben wir für $q := sb < 1$

$$\sum_{k=0}^n \|F_k \cdot (-)^k\|_{D(s)} \leq \sum_{k=0}^n |F_k| \cdot s^k \leq \sum_{k=0}^n Mb^k \cdot s^k = M \cdot \sum_{k=0}^n q^k = M \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

nach der geometrischen Summenformel. Für $n \rightarrow \infty$ konvergiert die rechte Seite wegen $q < 1$ gegen $\frac{1}{1-q}$ und nach dem Majorantenkriterium muss dann aber auch die linke Seite konvergieren. $\square$

Die Konvergenzfrage einer Potenzreihe übersetzt sich also in die Frage, ob ihre Koeffizientenfolge subexponentielles Wachstum hat, und für genau welche Exponentialbasen. Erlauben wir die Werte 0 und ∞ so gibt es natürlich immer eine größte solche Basis. Genauer erhalten wir:

5.4. Theorem Sei $F \in \mathbb{C}[[T]]$. Dann existiert genau ein $r \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ derart, dass

- (1) für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < r$ konvergiert die Reihe $\sum_{k \geq 0} F_k z^k$, und
 (2) für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > r$ divergiert die Reihe $\sum_{k \geq 0} F_k z^k$.

Es gilt

$$r = \sup\{t \geq 0 \mid \text{die Folge } k \mapsto |F_k| \cdot t^k \text{ ist beschränkt}\} \\ \sup\{t \geq 0 \mid \text{die Folge } |F_k| \cdot t^k \rightarrow 0 \text{ bei } k \rightarrow \infty\}$$

und für jedes $0 < s < r$ konvergiert die Funktionenreihe $\sum_{k \geq 0} [z \mapsto F_k z^k]$ auf $D(s)$ gleichmäßig gegen die Einschränkung der Funktion

$$D(r) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto \sum_{k \geq 0} F_k z^k$$

auf $D(s)$. Insbesondere ist diese Funktion auf ganz $D(r)$ stetig.

Achtung: Es folgt zwar dass die Funktionenreihe $\sum_{k \geq 0} [z \mapsto F_k z^k]$ auf ganz $D(r)$ punktweise absolut gegen die Funktion $z \mapsto \sum_{k \geq 0} F_k z^k$ konvergiert, aber es ist im allgemeinen nicht mehr richtig, dass diese Konvergenz auf ganz $D(r)$ gleichmäßig ist.

PROOF. Offenbar kann es höchstens ein solches r geben und es gilt $r = 0$ genau dann, wenn die Reihe $\sum_{k \geq 0} F_k z^k$ nur für $z = 0$ konvergiert (für $z = 0$ konvergiert sie natürlich immer). Schließen wir diesen Fall also von jetzt ab aus.

Als dann bemerken wir zunächst, dass die beiden Beschreibungen von r übereinstimmen: Da jede Nullfolge dem Betrage nach beschränkt ist sicherlich der erste Ausdruck nicht größer als der zweite. Aber ist $k \mapsto |F_k| \cdot t^k$ beschränkt, so ist für jedes $t' < t$

$$|F_k| \cdot (t')^k = |F_k| \cdot t^k \left(\frac{t'}{t}\right)^k \leq M \cdot \left(\frac{t'}{t}\right)^k$$

und rechts steht wegen $\frac{t'}{t} < 1$ eine Nullfolge. Aber damit kann auch der zweite Ausdruck nicht echt größer als der zweite sein.

Ist nun $0 < s < r$, so gibt es nach der ersten Definition von r ein $s < t < r$ derart, dass die Folge $k \mapsto |F_k| \cdot t^k$ beschränkt ist, also für ein $M \geq 0$ und alle $k \in \mathbb{N}$ gilt dass, $|F_k| \cdot t^k \leq M$. Aber dann konvergiert nach 5.3 die Reihe $\sum_{k \geq 0} \|z \mapsto F_k z^k\|_{D(s)}$ und damit nach dem Majorantenkriterium

auch die Reihe $\sum_{k \geq 0} F_k z^k$ für alle $z \in D(s)$ und das nach der Vorüberlegung sogar gleichmäßig. Insbesondere folgt, dass

$$D(s) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto \sum_{k \geq 0} F_k z^k$$

wohldefiniert und stetig ist.

Aber für jedes $z \in D(r)$ kann man natürlich ein $s > 0$ wählen mit $|z| < s < r$ und die obige Überlegung anwenden, sodass diese Funktion auf einer offenen Menge die z enthält wohldefiniert und stetig ist.

Und nehmen wir umgekehrt an, dass $\sum_{k \geq 0} F_k z^k$ für irgendein $z \in \mathbb{C}$ konvergiert, so müssen die Partialsummen der Reihe sicherlich eine Cauchyfolge bilden, was insbesondere zeigt, dass die Reihenglieder $F_k z^k$ eine Nullfolge bilden. Aber jede Nullfolge ist natürlich dem Betrage nach beschränkt und demzufolge gilt nach Definition von r schon $|z| < r$. $\square$

5.5. Definition Die Zahl $r \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ aus vorigem Satz heißt der *Konvergenzradius* von $F \in \mathbb{C}[[T]]$, geschrieben $\text{cvr}(F)$ (wobei das keine Standardnotation ist). Für $r > 0$ setzen wir dann noch

$$\mathcal{A}_r = \{F \in \mathbb{C}[[T]] \mid \text{cvr}(F) \geq r\},$$

$$\mathcal{A} = \bigcap_{r > 0} \mathcal{A}_r = \{F \in \mathbb{C}[[T]] \mid \text{cvr}(F) = \infty\}$$

und

$$\mathcal{A}_0 = \bigcup_{r > 0} \mathcal{A}_r = \{F \in \mathbb{C}[[T]] \mid \text{cvr}(F) > 0\}.$$

5.6. Beispiel (1) Den Konvergenzradius der Definition nach auszurechnen ist meist nicht ganz leicht, aber etwa sehen wir aufgrund der geometrischen Summenformel sofort, dass formale Potenzreihen der Form $F = \sum_{k \geq 0} a^k T^{nk}$ mit $a \in \mathbb{C}$, explizit gegeben durch

$$F_l = \begin{cases} a^{\frac{l}{n}} & n \mid l \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

Konvergenzradius $\frac{1}{\sqrt[n]{|a|}}$ haben: Für $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe $\sum_{k \geq 0} a^k z^{nk} = \sum_{k \geq 0} (az^n)^k$ genau dann wenn $|az^n| < 1$, was zur Behauptung äquivalent ist. Die zugehörige Funktion ist nach der geometrischen Reihenformel einfach durch

$$D\left(\frac{1}{\sqrt[n]{|a|}}\right) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longrightarrow \frac{1}{1 - az^n}$$

gegeben. Auf dem Rand der Konvergenzscheibe liegen für $a \neq 0$ also wirklich n Punkte, nämlich die n -ten Wurzeln von $\frac{1}{a}$, in die sich diese Funktion nicht einmal stetig fortsetzen lässt.

- (2) Natürlich ändert sich der Konvergenzradius nicht man nur endlich viele Koeffizienten einer formalen Potenzreihe verändert, insbesondere gilt $\text{cvr}(F + G) = \text{cvr}(F)$ für jedes $G \in \mathbb{C}[[T]]$.
- (3) Für $F, G \in \mathbb{C}[[T]]$ hat man allgemein

$$\text{cvr}(F + G) \geq \min\{\text{cvr}(F), \text{cvr}(G)\} \quad \text{und} \quad \text{cvr}(F \cdot G) \geq \min\{\text{cvr}(F), \text{cvr}(G)\}$$

da mit $\sum_{k \geq 0} F_k z^k$ und $\sum_{k \geq 0} G_k z^k$ für ein $z \in \mathbb{C}$ auch die Reihen

$$\sum_{k \geq 0} F_k z^k + G_k z^k = \sum_{k \geq 0} (F_k + G_k) z^k$$

und

$$\sum_{k \geq 0} \sum_{l=0}^k F_l z^l \cdot G_{k-l} z^{k-l} = \sum_{k \geq 0} \left(\sum_{l=0}^k F_l \cdot G_{k-l} \right) z^k$$

absolut konvergieren: Die vordere offenbar gegen $\sum_{k \geq 0} F_k z^k + \sum_{k \geq 0} G_k z^k$ und die hintere gegen $(\sum_{k \geq 0} F_k z^k) \cdot (\sum_{k \geq 0} G_k z^k)$ nach dem Satz von Mertens, der hoffentlich auch in

den Analysisvorlesung vorkam (hier braucht man auch zumindest für eine der Reihen wirklich absolute Konvergenz!).

- (4) Es folgt, dass aus $\mathcal{A}, \mathcal{A}_r, \mathcal{A}$ allesamt Unterringe von $\mathbb{C}[[T]]$ sind und das von 5.4 herrührenden Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{C}[T] & \longrightarrow & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A}_r & \longrightarrow & \mathcal{A}_0 \longrightarrow \mathbb{C}[[T]] \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \mathbb{C}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) & \xrightarrow{\text{res}} & \mathbb{C}(D(r), \mathbb{C}) & \xrightarrow{f \mapsto f(0)} & \mathbb{C} \end{array}$$

$F \mapsto F_0$

aus Ringhomomorphismen besteht.

Als Umformulierung der Beschreibung des Konvergenzradius in ?? formulieren wir noch explizit:

5.7. Korollar Sei $F \in \mathbb{C}[[T]]$. Dann gilt

$$\text{cvr}(F) = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|F_n|}}.$$

In dieser Form wird dieses Resultat meist als Formel von Cauchy-Hadamard bezeichnet. In den Übungen werden sie eine weitere kennen lernen (falls sie das aus der Analysis noch nicht tun).

BEWEIS. Ist $t > 0$ kleiner als die rechte Seite, also äquivalent $\frac{1}{t} > \limsup \sqrt[n]{|F_n|}$, so gibt es nach Definition des Limes superior ein $n \in \mathbb{N}$ mit $1/t > \sqrt[k]{|F_k|}$ für alle $k \geq n$. Bilden der k -ten Potenzen zeigt, dass $|F_k|t^k$ dann beschränkt ist, also $t < \text{cvr}(F)$.

Und ist umgekehrt $t < \text{cvr}(F)$ so ist $|F_k|t^k$ eine Nullfolge und daher gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|F_k|t^k < 1$ oder äquivalent $\sqrt[k]{|F_k|} < \frac{1}{t}$ für alle $k \leq n$. Nach Definition des Limes superior folgt damit $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|F_n|} \leq \frac{1}{t}$, was durch Inversion die Behauptung liefert. $\square$

Bevor uns nun der Holomorphie von Potenzreihen zuwenden, noch ein Wort zur Invertierbarkeit in Ringen von Potenzreihen:

5.8. Satz Es ist $F \in \mathbb{C}[[T]]$ eine Einheit genau dann, wenn $F_0 \neq 0$ ist. Ist $F \in \mathcal{A}_0$ so gilt in diesem Fall auch $\frac{1}{F} \in \mathcal{A}_0$.

Ist also insbesondere eine Funktion $f: D(r) \rightarrow \mathbb{C}$ durch eine Potenzreihe $F \in \mathbb{C}[[T]]$ darstellbar und $f(0) = F_0 \neq 0$, so ist auch $\frac{1}{f}: D(s) \rightarrow \mathbb{C}$ für klein genug $s > 0$ durch eine Potenzreihe darstellbar, nämlich $\frac{1}{F}$. Dies erklärt auch, dass der Konvergenzradius von $\frac{1}{F}$ durchaus kleiner sein kann als der von F : f kann ja in $D(r)$ eine Nullstelle haben und in diesem Fall kann $\frac{1}{f}$ natürlich nicht auf ganz $D(r)$ stetig fortgesetzt werden, erst recht nicht durch eine Potenzreihe gegeben sein.

Der Beweis wird eine konkrete, wenn auch nur induktive Beschreibung der inversen Potenzreihe bilden. Einige Beispiele kann man sich aber auch sofort überlegen:

5.9. Beispiel Für das Element $a + bT^n \in \mathbb{C}[T] \subset \mathbb{C}[[T]]$ mit $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ kann man aufgrund der geometrischen Reihenformel

$$\frac{1}{a + bz^n} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{-bz^n}{a}\right)} = \frac{1}{a} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{-bz^n}{a}\right)^k = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{a} \left(\frac{-b}{a}\right)^k z^{nk}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\left|\frac{-bz^n}{a}\right| < 1$ oder äquivalent $|z| < \sqrt[n]{\frac{|b|}{|a|}}$, raten dass die formale Potenzreihe $G \in \mathbb{C}[[T]]$ mit

$$G_l = \begin{cases} \frac{1}{a} \left(\frac{-b}{a}\right)^{\frac{l}{n}} & n \mid l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ein Inverses zu F ist. Und in der Tat haben wir durch Einsetzen

$$(F \cdot G)_l = \begin{cases} a \cdot G_l & l < n \\ a \cdot G_l + b \cdot G_{l-n} & l \geq n \end{cases} = \begin{cases} 1 & l = 0 \\ 0 & 0 < l < n \\ a \cdot \frac{1}{a} \left(\frac{-b}{a}\right)^{\frac{l}{n}} + b \cdot \frac{1}{a} \left(\frac{-b}{a}\right)^{\frac{l-n}{n}} & l \geq n, n \mid l \\ 0 & l \geq n, n \nmid l \end{cases}$$

und es gilt

$$a \cdot \frac{1}{a} \left(\frac{-b}{a}\right)^{\frac{l}{n}} + b \cdot \frac{1}{a} \left(\frac{-b}{a}\right)^{\frac{l-n}{n}} = \frac{-b}{a} \cdot \left(\frac{-b}{a}\right)^{\frac{l}{n}-1} + \frac{b}{a} \left(\frac{-b}{a}\right)^{\frac{l}{n}-1} = 0.$$

Insbesondere haben wir in $\mathbb{C}[[T]]$ etwa

$$\frac{1}{1-T} = \sum_{k \geq 0} T^k \quad \text{und} \quad \frac{1}{1+T^n} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k T^{nk}.$$

Dies sind insbesondere explizite Beispiele bei denen der Konvergenzradius des Inversen einer Potenzreihe also echt kleiner ist als der ursprüngliche.

PROOF. Da die Extraktion des nullten Koeffizienten einen Ringhomomorphismus $\mathbb{C}[[T]] \rightarrow \mathbb{C}$ liefert, ist für eine Einheit $F \in \mathbb{C}[[T]]$ sicherlich auf $F_0 \in \mathbb{C}$ eine Einheit, und damit nicht Null.

Für die Umkehrung behandeln wir zunächst den Fall $F_0 = 1$, da hier die Formeln ein wenig übersichtlicher sind (wie man in obigem Beispiel schon sehen kann). Wir suchen also ein $G \in \mathbb{C}[[T]]$ mit $F \cdot G = 1$, mit anderen Worten

$$1 = (F \cdot G)_0 = G_0, \quad 0 = (F \cdot G)_1 = G_1 + F_1 G_0, \quad 0 = (F \cdot G)_2 = G_2 + F_1 G_1 + F_2 G_0, \quad \dots$$

Setzt man in die rechten beiden Formeln dann einmal $G_0 = 1$ ein, so schreiben sie förmlich danach induktiv

$$G_{n+1} = -F_{n+1} - \sum_{k=1}^n F_k G_{n+1-k}$$

zu setzen.

Und damit rechnen wir in der Tat

$$(F \cdot G)_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} F_k G_{n+1-k} = G_{n+1} + F_{n+1} + \sum_{k=1}^n F_k G_{n+1-k} = 0$$

wie gewünscht.

Bleibt noch zu zeigen, dass wenn F positiven Konvergenzradius hat, dann auch G . Dafür gehen wir in zwei Schritten vor. Zunächst wissen wir aus 5.4, dass für $0 < s < \text{cvr}(F)$ die Folge $k \mapsto |F_k|s^k$ beschränkt bleibt, also $|F_k| \leq \frac{M}{s^k}$ für ein $M \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Die erste Behauptung ist nun, dass man für klein genug $s > 0$ einfach $M = 1$ wählen kann, solange man auf eine Abschätzung bei $k = 0$ verzichtet. Und haben wir einmal ein $r > 0$ mit $|F_k| \leq \frac{1}{r^k}$ für alle $0 \neq k \in \mathbb{N}$ gefunden, so ist die zweite Behauptung, dass dann für $k > 0$

$$|G_k| \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{r}\right)^k$$

gilt, und damit $\text{cvr}(G) \geq \frac{r}{2} > 0$ wie gewünscht.

Für die erste Behauptung bemerken wir, dass $k \mapsto |F_k|s^k$ nach 5.4 sogar eine Nullfolge bildet. Daher gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ derart dass $|F_k|s^k \leq 1$ für alle $k \geq n$ gilt. Aber wählen wir dann

$$r = \min \left\{ s, \frac{1}{\sqrt[k]{|F_k|}} \mid 1 \leq k \leq n, F_k \neq 0 \right\}$$

so hat man für $k \geq n$

$$|F_k| \leq \frac{1}{s^k} \leq \frac{1}{r^k}$$

und für $1 \leq k \neq n$ entweder $|F_k| = 0 < \frac{1}{r^k}$ oder bei $F_k \neq 0$ per Konstruktion von r auch

$$|F_k| = \sqrt[k]{|F_k|}^k \leq \frac{1}{r^k}.$$

Das zeigt die erste Behauptung, und für die zweite haben wir

$$|G_1| = |F_1| \leq \frac{1}{r} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{r}$$

und dann induktiv

$$\begin{aligned} |G_{n+1}| &= \left| F_{n+1} + \sum_{k=1}^n F_k G_{n+1-k} \right| \\ &= \left| F_{n+1} + \sum_{k=1}^n F_{n+1-k} G_k \right| \\ &\leq |F_{n+1}| + \sum_{k=1}^n |F_{n+1-k}| \cdot |G_k| \\ &\leq \frac{1}{r^{n+1}} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{r^{n+1-k}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{r} \right)^k \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{r^{n+1}} + \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{k=1}^n 2^k \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{r^{n+1}} + \frac{1}{r^{n+1}} \cdot (2^{n+1} - 2) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{r} \right)^{n+1} \end{aligned}$$

aufgrund der geometrischen Summenformel.

Und im Allgemeinfall können wir natürlich $F = F_0 \cdot \frac{F}{F_0}$ schreiben, und das ist als Produkt von zwei Einheiten wieder eine und offenbar vererbt sich auch der positive Konvergenzradius unter Multiplikation mit $\frac{1}{F_0}$. $\square$

Und nun zum *pièce de résistance*, der Holomorphie von durch Potenzreihen dargestellten Funktionen. Als letzte Vorbereitung noch:

5.10. Lemma *Sei $F \in \mathbb{C}[[T]]$. Dann gilt für die formale Potenzreihe $dF := \sum_{k \geq 0} (k+1)F_{k+1}z^k$, dass $\text{cvr}(F) = \text{cvr}(dF)$.*

Man nennt $d: \mathbb{C}[[T]] \rightarrow \mathbb{C}[[T]]$ die *formale Ableitung*. Das Lemma sagt insbesondere, dass sie sich zu einer Abbildung $\mathcal{A}_r \rightarrow \mathcal{A}_r$ einschränkt. Man prüft leicht, dass d additiv ist, $d(1) = 0$ und

$$d(F \cdot G) = d(F) \cdot G + F \cdot d(G)$$

für alle $F, G \in \mathbb{C}[[T]]$ gilt.

PROOF. Wir zeigen, dass für eine reelle Zahl $t \geq 0$ gilt, dass $t < \text{cvr}(F)$ auch $t \leq \text{cvr}(dF)$ impliziert und andersherum.

Ist nämlich $t < \text{cvr}(dF)$ so ist $k \mapsto (k+1)F_{k+1}t^k$ beschränkt, etwa $(k+1)|F_{k+1}| \leq \frac{M}{t^k}$ und dann für $k > 0$

$$|F_k| = \frac{1}{k} \cdot k|F_k| \leq \frac{1}{k} \cdot \frac{M}{t^{k-1}} = \frac{tM}{k} \cdot \frac{1}{t^k} \leq tM \cdot \frac{1}{t^k}$$

und damit $t \leq \text{cvr}(F)$.

Und ist umgekehrt $t < \text{cvr}(F)$, so wähle man ein $t < s < \text{cvr}(F)$. Es ist dann immer noch $|F_k| \leq \frac{M}{s^k}$ für ein $M \geq 0$ und alle $k \in \mathbb{N}$ und dann

$$|(k+1)F_{k+1}| \cdot t^k = \frac{|F_{k+1}|s^{k+1}}{t} \cdot (k+1) \left(\frac{t}{s} \right)^{k+1} \leq \frac{M}{t} \cdot (k+1) \left(\frac{t}{s} \right)^{k+1}$$

Aber für $q < 1$ ist $k \mapsto kq^k$ eine Nullfolge und damit beschränkt, was wegen $\frac{t}{s} < 1$ also $t \leq \text{cvr}(\text{d}F)$ liefert; der Vollständigkeit halber (oder vielmehr weil ich mich noch einmal dran erinnern wollte, wie man das beweist), erkläre ich das mit der Nullfolge noch einmal.

Man schreibe nämlich einfach $\frac{1}{q} = 1 + \epsilon$ mit $\epsilon = \frac{1-q}{q} > 0$. Es gilt dann gemäß binomischem Lehrsatz

$$kq^k = k \cdot \frac{1}{(1+\epsilon)^k} < k \cdot \frac{2}{k(k-1)\epsilon^2} = \frac{2}{(k-1)\epsilon^2}$$

was offenbar das gewünschte liefert. Bilden der n -Potenzen für irgendein $n \geq 1$ und etwas umformulieren zeigt dann auch direkt, dass Exponentialfunktionen bis Basis $q > 1$ schneller wachsen als jedes Polynom. $\square$

Und damit sind wir endlich bereit für:

5.11. Theorem *Es sei $F \in \mathbb{C}[[T]]$ mit $r = \text{cvr}(F) > 0$. Dann ist die von F dargestellte Funktion*

$$F: D(r) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto \sum_{k \geq 0} F_k z^k$$

holomorph und ihre Ableitung wird durch $\text{d}F$ dargestellt, mit anderen Worten, es gilt

$$F'(z) = \sum_{k \geq 0} k \cdot F_k \cdot z^{k-1}$$

für alle $z \in D(r)$.

Wir erhalten also die Verfeinerung

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{C}[T] & \longrightarrow & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A}_r & \longrightarrow & \mathcal{A}_0 \longrightarrow \mathbb{C}[[T]] \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \mathcal{O}(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\text{res}} & \mathcal{O}(D(r)) & \xrightarrow{f \mapsto f(0)} & \mathbb{C} \end{array} \quad \begin{array}{c} \swarrow \\ F \mapsto F_0 \end{array}$$

des analogen Diagrams in 5.6.

5.12. Korollar *Es sei $F \in \mathbb{C}[[T]]$ mit $\text{cvr}(F) > 0$. Dann gilt $F^{(k)}(0) = k! F_k$. Insbesondere sind die Abbildungen*

$$\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{O}(\mathbb{C}) \quad \text{und} \quad \mathcal{A}_r \longrightarrow \mathcal{O}(D(r))$$

für $r > 0$ injektiv.

Es ist also eine formale Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius durch ihre assoziierte Funktion bestimmt.

BEWEIS VON 5.11. Man nehme den Beweis für Polynome in 3.4 und nehme den offensichtlichen Grenzwert. Im Detail: Um die Differenzierbarkeit bei $z \in D(r)$ nachzuweisen, betrachte

$$h_{n,z}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad x \longrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} x^k z^{n-1-k}.$$

Dann ist $h_{n,z}$ als komplexes Polynom überall stetig und wir haben für $n \geq 1$

$$(x-z) \cdot h_{n,z}(x) = z^n + (x-z) \sum_{k=0}^{n-1} x^k z^{n-1-k} = x^n - z^n$$

und damit

$$\sum_{n=0}^k F_n (x^n - z^n) = (x-z) \sum_{n=1}^k F_n h_{n,z}(x)$$

da der nullte Summand der linken Seite ohnehin verschwindet. Wir wollen nun also $k \rightarrow \infty$ gehen lassen. Aber für jedes $|z| < s < r$ haben wir, wenn auch $|x| < s$ gilt

$$|h_{n,z}(x)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |x^k| \cdot |z^{n-1-k}| \leq \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1} = ns^{n-1}$$

und daher

$$\sum_{n \geq 1} \|F_n h_{n,z}\|_{D(s)} \leq \sum_{n \geq 1} |F_n| n s^{n-1} = \sum_{n \geq 0} \|(\mathrm{d}F)_n \cdot (-)^n\|_{D(s)}$$

und die rechte Reihe ist nach Lemmata 5.3 und 5.10 konvergent. Es ist definiert also

$$x \mapsto \sum_{n \geq 1} F_n h_{n,z}(x)$$

eine stetige Funktion $h_z: D(r) \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$F(x) - F(z) = \sum_{n \geq 0} F_n (x^n - z^n) = (x - z) \cdot h_z(x).$$

Es ist also F differenzierbar bei z mit

$$F'(z) = h(z) = \sum_{n \geq 1} n F_n z^{n-1} = \sum_{n \geq 0} (\mathrm{d}F)_n z^n$$

wie behauptet. □