In einem metrischen Raum (X,d) bezeichnen wir mit

$$\mathrm{D}(x,r) := \{y \in X \mid d(x,y) < r\}$$

für $x \in X$ und $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, den offenen Ball um x mit Radius r. Zur Erinnerung: Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt offen (bezüglich d), wenn es zu jedem $x \in U$ ein $r > 0$ gibt mit $\mathrm{D}(x,r) \subseteq U$.

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung mit $|f(t)| \to \infty$ bei $t \to \infty$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{Im}(f)$ offen ist.

Hier bezeichnet $\mathrm{Im}(f)$ das Bild von f und ist $\mathbb{R}^n$ natürlich überall mit der euklidischen Metrik ausgestattet.

Lösungsvorschlag. Ist $x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{im}(f)$, so gibt es wegen $|f(t)| \to \infty$ bei $t \to \infty$ ein $r > 0$ mit $|f(t)| > 2|x|$ für alle $t > r$. Es gilt also

$$\mathrm{D}(0,2|x|) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{im}(f)) = \mathrm{D}(0,2|x|) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{im}(f_{|[0,r]})).$$

Da $[0,r]$ abgeschlossen und beschränkt ist, hat jede Folge in $[0,r]$ nach Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge. Das impliziert, dass für jede Folge in $\mathrm{im}(f_{|[0,r]})$, die gegen ein $x \in \mathbb{R}^n$ konvergiert, schon $x \in \mathrm{im}(f_{|[0,r]})$ gilt (mit anderen Worten $\mathrm{im}(f_{|[0,r]})$ ist abgeschlossen): Man wähle eine Urbildfolge in $[0,r]$, dann eine konvergente Teilfolge, die etwa gegen $t \in [0,r]$ konvergiert. Dann impliziert die Stetigkeit von f, dass die Bildfolge gegen $f(t)$ konvergiert, und weil jede Teilfolge einer konvergenten Folge gegen den gleichen Grenzwert konvergiert, folgt $x = f(t) \in \mathrm{im}(f_{|[0,r]})$.

Aber dann gibt es um jeden Punkt $y \in \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{im}(f_{|[0,r]})$ ein $\epsilon > 0$ mit $\mathrm{D}(y,\epsilon) \cap \mathrm{im}(f_{|[0,r]}) = \emptyset$: Sonst könnten wir uns ja in jedem $\mathrm{D}\left(y,\frac{1}{n}\right) \cap \mathrm{im}(f_{|[0,r]})$ ein Element f_n wählen. Per Konstruktion lägen die Folge f dann in $\mathrm{im}(f_{|[0,r]})$ und würde gegen y konvergieren, was im Widerspruch zur Vorüberlegung steht.

Insbesondere kann man also für unseren ursprünglichen Punkt x so ein $\epsilon > 0$ finden, also eines mit

$$\mathrm{D}(x,\epsilon) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{im}(f_{|[0,r]})$$

und für $\delta = \min(\epsilon, |x|)$ gilt dann

$$\mathrm{D}(x,\delta) \subseteq \mathrm{D}(x,\epsilon) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{im}(f_{|[0,r]}) \quad \text{und} \quad \mathrm{D}(x,\delta) \subseteq \mathrm{D}(0,2|x|),$$

zweiteres weil $|z-x| < \delta$ offenbar $|z| \leq |x| + |z-x| < |x| + \delta \leq 2|x|$ gilt. Damit haben wir nach Wahl von r

$$\mathrm{D}(x,\delta) \subseteq \mathrm{D}(0,2|x|) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{im}(f_{|[0,r]})) = \mathrm{D}(0,2|x|) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{im}(f)) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{im}(f)$$

wie gewünscht. $\square$

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Finden Sie eine Menge X zusammen mit zwei Metriken d und d' auf X derart, dass die Mengen der konvergenten Folgen in (X,d) und (X,d') übereinstimmen, aber die Mengen der Cauchy-Folgen nicht.

Hinweis: Als (X,d) kann man zum Beispiel einfach $X = \mathbb{R}_{>0}$ mit der euklidischen Metrik wählen, interessante Einbettungen dieser Linie in die Ebene betrachten und die euklidische Metrik des $\mathbb{R}^2$ einschränken.

Lösungsvorschlag. Wir beginnen mit zwei allgemeinen Beobachtungen: Ist g eine Abbildung $X \to Y$ und e eine Pseudometrik auf Y, so ist

$$X \times X \longrightarrow [0,\infty], \quad (x,x') \longmapsto e(g(x), g'(x))$$

eine Pseudometrik auf X, genannt die zurückgezogene Metrik g^*e, und ist e eine Metrik und g injektiv, so ist g^*e offenbar wieder eine Metrik (der Nachweis besteht nur aus Auschreiben der Axiome!).

Der Hinweis schlägt vor die euklidische Metrik des $\mathbb{R}^2$ auf diese Weise für eine Injektion $g\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}^2$ zurückzuziehen.

Die zweite Beobachtung ist, dass eine bezüglich einer schon gegebenen Metrik d auf X gegen $x \in X$ konvergente Folge f von, auch bezüglich g^*e gegen x konvergiert, wenn g stetig ist: Das bedeutet ja gerade, dass es bei zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt

$$d(x, x') < \delta \Longrightarrow e(g(x), g(x')) < \epsilon$$

und die Konvergenz von f, dass es zu jedem $\delta > 0$ ein $k \in \mathbb{N}$ gibt so, dass

$$k \geq n \Longrightarrow d(f_k, x) < \delta,$$

was man nur zusammenstöpseln braucht.

Es hat also für jede stetige Injektion $g\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}^2$, der Rückzug der euklidischen Metrik der Ebene schonmal höchstens mehr konvergente Folgen als die euklidische Metrik des $\mathbb{R}_{>0}$. Und ist g von der Form $x \mapsto (x, y(x))$ für eine stetige Abbildung $y\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, so haben wir

$$(g^*\mathrm{eucl})(t, s) = \big|(t, y(t)) - (s, y(s))\big| = \sqrt{(t-s)^2 + (y(t) - y(s))^2} \geq |t - s|,$$

was sicherlich sofort impliziert, dass auch jede bezüglich $g^*\mathrm{eucl}$ konvergente Folge auch bezüglich der euklidischen Metrik konvergiert.

Bleibt also nur noch eine interessante Funktion y anzugeben, die die Menge der Cauchyfolgen verändert. Man kann sich jetzt auch noch überlegen, dass das mit der gleichmäßiger Stetigkeit von y zu tun hat, aber es $y(t) = \frac{1}{t}$ vielleicht ein offensichtlich genuger Kandidat um ihn mal zu versuchen: Und in der Tat ist $n \mapsto \frac{1}{n}$ ist eine Cauchyfolge bezüglich der euklidischen Metrik (sie ist ja in ganz $\mathbb{R}$ sogar konvergent) aber es gilt dann

$$(g^*\mathrm{eucl})(t, s) = \left|\left(t, \tfrac{1}{t}\right) - \left(s, \tfrac{1}{s}\right)\right| = \sqrt{(t-s)^2 + \left(\tfrac{1}{t} - \tfrac{1}{s}\right)^2}$$

und damit

$$(g^*\mathrm{eucl})\left(\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{m}\right) = \sqrt{\left(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{m}\right)^2 + (n-m)^2} \geq |n - m|$$

was sicherlich ausschließt, dass $n \mapsto \frac{1}{n}$ bezüglich dieser Metrik eine Cauchyfolge ist (das entspricht natürlich einfach der Beobachtung dass $n \mapsto \left(n, \frac{1}{n}\right)$ im $\mathbb{R}^2$ nicht konvergiert).

Man kann die euklidische Metrik vielleicht auch noch einfacher direkt vermöge der Abbildung $g\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$, $t \mapsto \frac{1}{t}$ zurückziehen, also als zweite Metrik

$$d\colon \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}, \quad (x, y) \longmapsto \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$$

betrachten.

Ist nämlich $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$ eine gegen x konvergente Folge bezüglich der euklidischen Topologie, so ist wegen der Stetigkeit von f auch $\frac{1}{h}$ eine gegen $\frac{1}{x}$ konvergente Folge, mit anderen Worte zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq k$

$$\left|\frac{1}{h_n} - \frac{1}{x}\right| < \epsilon$$

gilt, und das besagt aber gerade auch die Konvergenz von h gegen x bezüglich d. Und konvergiert umgekehrt h gegen x bezüglich d, so gibt es nach Definition von d wieder zu jedem $\epsilon > 0$ mit obiger Eigenschaft, sodass $\frac{1}{h}$ per Definition in der euklidischen Metrik gegen $\frac{1}{x}$ konvergiert. Aber wegen der Stetigkeit von g konvergiert dann auch h gegen x bezüglich der euklidischen Metrik.

Und die euklidische Cauchyfolge $n \mapsto \frac{1}{n}$ erfüllt nun $d\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) = |n - m|$ im Widerspruch zu Cauchy'schen Bedingung. □

Aufgabe 3 (5 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass es zu jedem offenen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abzählbar viele offene Bälle $B_i \subseteq \mathbb{R}^n$, $i \in \mathbb{N}$ gibt mit $U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$.

2. Finden Sie einen metrischen Raum (X, d) und eine offene Teilmenge $U \subseteq X$, die sich nicht als abzählbare Vereinigung offener Bälle darstellen lässt.

Lösungsskizze. 1. Wir wählen einfach die offenen Kugel mit rationalen Mittelpunkt und Radius die in U enthalten sind, wovon es nach Cantor's Diagonalsatz eben nur abzählbar viele gibt. Wir müssen also

$$U = \bigcup_{\substack{p\in\mathbb{Q}^n, r\in\mathbb{Q}_{>0} \\ \mathrm{D}(p,r)\subseteq U}} \mathrm{D}(p,r)$$

nachweisen. Sicherlich ist die rechte in der linken Seite enthalten. Für die umgekehrte Inklusion, wähle $x \in U$. Nach Definition der Offenheit von U gibt es dann ein $\epsilon > 0$ mit $\mathrm{D}(x,\epsilon) \subseteq U$. Wähle nun rationale Zahlen $p_i \in [x_i, x_i + \frac{\epsilon^2}{4n}[$ für alle $1 \le i \le n$. Dann gilt schonmal

$$|p-x| = \sqrt{(p_1-x_1)^2 + \ldots (p_n-x_n)^2} < \sqrt{n \cdot \frac{\epsilon^2}{4n}} = \frac{\epsilon}{2}$$

also $x \in \mathrm{D}(q, \frac{\epsilon}{2})$ und

$$|y-p| < \frac{\epsilon}{2} \Longrightarrow |x-y| \le |y-p| + |p-x| < \epsilon$$

also

$$\mathrm{D}(p, \tfrac{\epsilon}{2}) \subseteq \mathrm{D}(x,\epsilon) \subseteq U$$

Wählen wir nun noch ein rationales $r \in]|p-x|, \frac{\epsilon}{2}]$, so gilt sicherlich immer noch

$$x \in \mathrm{D}(p,r) \subseteq U$$

und damit ist x in der Vereinigung auf der rechten Seite enthalten wie behauptet.

2. Am einfachsten nehme man eine überabzählbare Menge X (etwa $X = \mathbb{R}$) und statte sie mit der Metrik

$$d\colon X \times X \longrightarrow [0,\infty], \quad (x,y) \longmapsto \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

aus. Das ist trivialerweise eine Metrik, und für $x \in X$ gilt

$$\mathrm{D}(x,r) = \begin{cases} \{x\} & 0 < r \le 1 \\ X & r > 1 \end{cases}$$

Es ist also jede Teilmenge U von X offen bezüglich d, da mit x immer ganz $\mathrm{D}(x,1) = \{x\}$ in U liegt. Und ist $U \neq X$, so enthält U nur einpunktige Kugeln. Zusammengenommen kann als keine überabzählbare echte Teilmenge von X (etwa kein $X \setminus \{x\}$) als Vereinigung abzählbar vieler Kugeln dargestellt werden.

□

Aufgabe 4 (5 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass es zu jedem offenen $U \subseteq \mathbb{R}$ genau eine abzählbare Familie $\mathcal{F}$ von offenen Intervallen in $\mathbb{R}$ gibt mit $U = \bigcup_{I\in\mathcal{F}} I$ und $I \cap J = \emptyset$ für alle $I, J \in \mathcal{F}$ mit $I \neq J$.

2. Wenn U beschränkt ist, ist dies eine Zerlegung in offene Bälle wie in der vorigen Aufgabe. Wann genau ist es eine? Können Sie eine offene beschränkte Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ angeben, die sich nicht als disjunkte Vereinigung von offenen Bällen schreiben lässt.

Lösungsskizze. 1. Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf U durch $t \sim s$, falls es ein Intervall $I \subseteq U$ gibt mit $s, t \in I$. Es gilt dann $s \sim s$ weil $s \in [s,s] \subseteq U$, offensichtlich gilt $s \sim t$ genau dann, wenn $t \sim s$ und sind $s, t \in I \subseteq U$ und $t, u \in J \subseteq U$, so ist auch $I \cup J \subseteq U$ ein Intervall: Dazu gilt zu zeigen, dass für $x < y < z \in \mathbb{R}$ aus $x, z \in I \cup J$ schon $y \in I \cup J$ gilt. Sind x, z beide in I oder beide in J, folgt das natürlich daraus, dass I, J Intervalle sind. Sei also etwa $x \in I$ und $z \in J$ (der andere Fall ist natürlich analog). Nehmen wir an $y \notin I$. Dann kann y nicht zwischen x und t liegen (I ist ja ein Intervall), es muss also entweder $y < x, t$ oder $y > x, t$ und das erste ist natürlich ausgeschlossen. Aber dann liegt y zwischen t und z und damit in J wie behauptet.

Die Äquivalenzklassen dieser Relation sind dann die gesuchte Familie von offenen Intervallen: Wie die Äquivelnzklassen jeder Äquivalenzrelation überdecken sie U und sind disjunkt, und um zu sehen, dass sie wirklich Intervalle sind, folgt direkt indem man sich $x < y < z \in \mathbb{R}$ mit $x \sim z$, beobachtet, dass dies bedeutet, dass es ein Intervall $I \subseteq U$ mit $x, z \in I$ gibt, indem dann per Definitionem auch y enthalten sein muss, sodass auch $x \sim y (\sim z)$ folgt. Und die Offenheit, folgt aus der von U: Ist nämlich $y \in U$, so gibt es ja ein $\epsilon > 0$ mit

$$]y-\epsilon, y+\epsilon[= \mathrm{D}(y,\epsilon) \subseteq U$$

woraus offenbar $y \sim t$ für alle $t \in]y-\epsilon, y+\epsilon[$ folgt. Es kann die Äquivalenzklasse von y weder ein kleinstes noch ein größtes Element besitzen.

Dass diese Zerlegung abzählbar ist, folgt sofort daraus, dass jedes offene Intervall eine rationale Zahl enthält, die Abbildung $\mathbb{Q} \cap U \to U/\sim$ also surjektiv ist.

Bleibt noch die Eindeutigkeit zu zeigen. Haben wir etwa $U = \bigcup_{I \in \mathcal{F}} I$ für eine Familie $\mathcal{F}$ von disjunkten, offenen (nicht-leeren) Intervallen, so folgt offensichtlich $s \sim t$ für alle $s, t \in I \in \mathcal{F}$. Es ist also jedes Intervall auf $\mathcal{F}$ in einer einzigen Äquivalenzklasse enthalten, und das erzwingt offenbar

$$[x] = \bigcup_{I \in \mathbb{F}, I \subseteq [x]} I$$

Wir sind also fertig, wenn wir zeigen, dass sich ein offenes Intervall J (hier $[x]$) nicht als disjunkte Vereinigung von mehr als einem offenen (nicht-leeren!) Intervall schreiben lässt. Das folgt zum Beispiel aus dem Zwischenwertsatz: Man wähle man sich eins der Intervall aus, nenne es K und betrachte

$$f : J \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \begin{cases} 0 & t \in K \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dies ist eine stetige Funktion (für jeden Punkt $x \in J$ gibt es schließlich ein $\delta > 0$ derart, dass f auf $]x - \delta, x+\delta[$ konstant ist, weil man δ klein genug wählen kann, dass es vollständig in einem der Zerlegungsintervalle liegt). Da sie den Wert 0 ja sicher annimmt, müsste sie, wenn sie den Wert 1 annähme, nach dem Zwischenwertsatz auch alle Wert dazwischen annehmen, was sie ja aber nicht tut. Also kann sie den Wert 1 nicht annehmen, was $J = K$ bedeutet.

2. Ein offenes Intervall ist genau dann eine offene Kugel in $\mathbb{R}$, wenn es entweder beschränkt ist $]a, b[= \mathrm{D}\left(\frac{b+a}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$ (dann mit endlichem Radius) oder ganz $\mathbb{R}$ (bei unendlichem); die in nur eine Richtung unbeschränkten Intervall sind es nicht und dürfen daher in der Zerlegung von U nicht vorkommen. Und das ist offenbar genau dann nicht der Fall, wenn $\mathbb{R} \setminus U$ in beide Richtungen unbeschränkt (oder leer) ist. $U = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ist eine Menge die das erfüllt ohne selbst beschränkt zu sein.

   Aber im $\mathbb{R}^2$ ist schon ein offenes Rechteck R, etwa $]0,1[\times]0,1[$, nicht mehr disjunkte Vereinigung einer Familie $\mathcal{F}$ euklidischer Kugeln: Nehmen wir an, dass doch, und wählen zwei Kugelmittelpunkte $x, y \in R$ von Kugeln aus $\mathcal{F}$. Dann betrachte die direkte Verbindungsstrecke

$$w : [0,1] \longrightarrow R, \quad t \longmapsto ty + (1-t)x.$$

   Offenbar gibt es dann ein $\delta > 0$ so, dass w das Intervall $[0,\delta[$ vollständig in die Kugel um x schickt, und $]1-\delta, 1]$ in die um y. Betrachte, dann die Einschränkung v von w auf $]0,1[$. Für jede offene Kugel D in R ist die Menge $v^{-1}(D)$ ein offenes Intervall in $]0,1[$ (der Schnitt einer Kugel mit einer Strecke ist ja wieder eine Strecke), sodass insbesondere die $f^{-1}(K), K \in \mathcal{F}$ eine Überdeckung durch disjunkte offene Intervalle von $]0,1[$ bilden. Und zumindest die Urbilder der Kugeln um x und y enthalten ja das Anfangs- und Endstück von $]0,1[$, sind also nicht leer. Das widerspricht aber der Eindeutigsaussage in (1), denn $\{]0,1[\}$ ist natürlich selber auch eine Familie von Intervallen die $]0,1[$ disjunkt überdeckt.

$\square$