

In einem metrischen Raum  $(X, d)$  bezeichnen wir mit

$$D(x, r) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

für  $x \in X$  und  $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , den offenen Ball um  $x$  mit Radius  $r$ . Zur Erinnerung: Eine Teilmenge  $U \subseteq X$  heißt offen (bezüglich  $d$ ), wenn es zu jedem  $x \in U$  ein  $r > 0$  gibt mit  $D(x, r) \subseteq U$ .

### Aufgabe 1 (5 Punkte)

Sei  $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige Abbildung mit  $|f(t)| \rightarrow \infty$  bei  $t \rightarrow \infty$ . Zeigen Sie, dass  $\mathbb{R}^n \setminus \text{Im}(f)$  offen ist.

Hier bezeichnet  $\text{Im}(f)$  das Bild von  $f$  und ist  $\mathbb{R}^n$  natürlich überall mit der euklidischen Metrik ausgestattet.

### Aufgabe 2 (5 Punkte)

Finden Sie eine Menge  $X$  zusammen mit zwei Metriken  $d$  und  $d'$  auf  $X$  derart, dass die Mengen der konvergenten Folgen in  $(X, d)$  und  $(X, d')$  übereinstimmen, aber die Mengen der Cauchy-Folgen nicht.

Hinweis: Als  $(X, d)$  kann man zum Beispiel einfach  $X = \mathbb{R}_{>0}$  mit der euklidischen Metrik wählen, interessante Einbettungen dieser Linie in die Ebene betrachten und die euklidische Metrik des  $\mathbb{R}^2$  einschränken.

### Aufgabe 3 (5 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass es zu jedem offenen  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  abzählbar viele offene Bälle  $B_i \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $i \in \mathbb{N}$  gibt mit  $U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$ .
2. Finden Sie einen metrischen Raum  $(X, d)$  und eine offene Teilmenge  $U \subseteq X$ , die sich nicht als abzählbare Familie offener Bälle darstellen lässt.

### Aufgabe 4 (5 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass es zu jedem offenen  $U \subseteq \mathbb{R}$  genau eine Familie  $\mathcal{F}$  von offenen Intervallen in  $\mathbb{R}$  gibt mit  $U = \bigcup_{I \in \mathcal{F}} I$  und  $I \cap J = \emptyset$  für alle  $I, J \in \mathcal{F}$  mit  $I \neq J$ .
2. Wenn  $U$  beschränkt ist, ist dies eine Zerlegung in offene Bälle wie in der vorigen Aufgabe. Wann genau ist es eine? Können Sie eine offene beschränkte Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  angeben, die sich nicht als disjunkte Vereinigung von offenen Bällen schreiben lässt.