

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Geben wir der Menge der Funktionen $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ die von der Supremumsmetrik

$$d: F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}, \quad (f, g) \longmapsto \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t) - g(t)|$$

induzierte Topologie. Bestimmen Sie für welche $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow F(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \lambda \mapsto \lambda f$ stetig ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Es sei \sim eine Äquivalenzrelation und d eine Pseudometrik auf einer Menge X . Wir setzen

$$\tilde{d}: X/\sim \times X/\sim \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}, \quad (A, B) \longmapsto \inf_{a \in A, b \in B} d(a, b)$$

1. Zeigen Sie, dass die Funktion $d/\sim: X/\sim \times X/\sim \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ gegeben durch

$$(A, B) \longmapsto \inf_{C_1, \dots, C_n \in X/\sim} \tilde{d}(A, C_1) + \tilde{d}(C_1, C_2) + \dots + \tilde{d}(C_{n-1}, C_n) + \tilde{d}(C_n, B)$$

eine Pseudometrik auf X/\sim ist, die sogenannte Quotientenmetrik.

2. Finden Sie ein Beispiel, in dem \tilde{d} selbst keine Pseudometrik ist.

In Ermangelung eines besseren Namens, nenne ich eine reflexive und transitive Relation \leq auf einer Menge X einmal eine *schwache Ordnung*. Es heißt dann $U \subseteq X$ *nach oben abgeschlossen*, wenn für $u \in U$ und $x \in X$ aus $u \leq x$ immer schon $x \in U$ folgt.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Zeigen Sie:

1. Für jede schwach geordnete Menge (X, \leq) bilden die nach oben abgeschlossenen Teilmengen von X eine Topologie, die sogenannte *Alexandrov Topologie* der Relation \leq .
2. Ist (Y, \preceq) eine weitere schwach geordnete Menge, so ist eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ stetig bezüglich der Alexandrov Topologien genau dann, wenn sie monoton ist (also wenn immer $x \leq x' \Rightarrow f(x) \preceq f(x')$).

Es sei X ein Menge und $i: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ eine Abbildung, die die Kuratowski'schen Kernaxiome

$$i(X) = X, \quad i(U) \subseteq U, \quad i(i(U)) = i(U) \quad \text{und} \quad i(U \cap V) = i(U) \cap i(V)$$

für alle $U, V \subseteq X$ erfülle.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Zeigen Sie:

1. Dann ist

$$\text{Fix}_i = \{U \subseteq X \mid i(U) = U\}$$

eine Topologie auf X .

2. Ist \mathcal{T} eine Topologie auf X , so erfüllt

$$\text{Int}_{\mathcal{T}}: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X), \quad U \longmapsto \{x \in U \mid \exists V \in \mathcal{T} \text{ mit } x \in V \subseteq U\}$$

die Kernaxiome.

3. Diese Prozesse geben inverse Bijektionen zwischen der Menge der Topologien auf X und der Menge der Abbildungen $\mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$, die die Kernaxiome erfüllen.

Können Sie auch das zu i gehörige Umgebungssystem beschreiben?