Aufgabe 1 (5 Punkte)

Zeigen Sie:

1. Ist M ein C^l-Mannigfaltigkeit, so bilden die Karten

   $$V \times \mathbb{R}^m \xrightarrow{\varphi^{-1} \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}} U \times \mathbb{R}^m \xrightarrow{\mathrm{I}\varphi} \mathrm{T}M_{|U},$$

   wo (U, V, φ) die C^l-Karten von M durchläuft, einen C^{l-1}-Atlas von $\mathrm{T}M$.

2. Ist N eine zweite C^l-Mannigfaltigkeit und $f : M \to N$ l-fach stetig differenzierbar, so ist $\mathrm{D}f : \mathrm{T}M \to \mathrm{T}N$ $(l-1)$-fach stetig differenzierbar.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass für eine lokal triviale Abbildung $\pi \colon E \to B$ mit B zusammenhängend alle Fasern von π homöomorph zueinander sind.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Es sei $\pi \colon E \to B$ lokal trivial und $\sigma : B \to E$ ein stetiger Schnitt von π (also $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_B$. Zeigen Sie:

1. Die Abbildung π ist offen (das heißt Bilder offener Teilmengen sind offen).

2. Die Abbildung σ ist abgeschlossen (das heißt Bilder abgeschlossener Teilmengen sind wieder abgeschlossen), wenn alle Fasern von π Hausdorff'sch sind.

Finden sie ein Beispiel einer lokal trivialen Abbildung mit T1-Fasern, für das die zweite Aussage nicht stimmt?

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad z \longmapsto z^n$$

eine n-blättrige Überlagerung ist.