

### Aufgabe 1 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass jede Mannigfaltigkeit kompakt erzeugt ist (also eine Teilmenge abgeschlossen genau dann, wenn ihr Schnitt mit jeder kompakten Teilmenge das ist).

### Aufgabe 2 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Tangentialbündel einer jeden Liegruppe trivial ist.

Hinweis: Leiten Sie einmal die Multiplikation ab!

### Aufgabe 3 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass ein jeder Atlas eines  $n$ -dimensionalen reellen Vektorbündels Strukturgruppe  $GL_n(\mathbb{R})$  hat, und das umgekehrt jeder Atlas eines Faserbündels mit typischer Faser  $\mathbb{R}^n$  und Strukturgruppe  $GL_n(\mathbb{R})$  eine Addition und Skalarmultiplikation besitzt, die es zu einem Vektorbündel machen.

Anmerkung: Es wirkt hierbei  $GL_n(\mathbb{R})$  natürlich vermöge der Matrixmultiplikation  $GL_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

### Aufgabe 4 (5 Punkte)

Es sei  $\pi: E \rightarrow B$  eine zweiblättrige Überlagerung. Zeigen Sie, dass dann

$$(E \times \mathbb{R})/\{\pm 1\} \longrightarrow B, \quad [e, t] \longmapsto \pi(t),$$

die Struktur eines eindimensionalen Vektorbündels trägt, wobei  $\{\pm 1\}$  durch

$$1 \cdot (e, t) = (e, t) \quad \text{und} \quad (-1) \cdot (e, t) = (e', -t)$$

auf  $E \times \mathbb{R}$  wirkt, wo  $\pi^{-1}(\pi(e)) = \{e, e'\}$ . Können Sie  $\pi$  aus diesem zurückgewinnen?