

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Zeigen Sie: Gibt es einen Homöomorphismus $f: V \rightarrow U$, wobei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^2$ offen sind, so folgt $n = 2$.

Hinweis: Zum Beispiel kann man sich eine Scheibe $D \subseteq V$ hernehmen, dann einen Ball $B \in f(D)$ und eine weitere Scheibe $D' \subseteq f^{-1}(B)$ und die Inklusion $D' \setminus \{d\} \subseteq D \setminus \{d\}$ für ein $d \in D'$ im Bezug auf Fundamentalgruppen betrachten.

Lösungsvorschlag. Wir folgen dem Hinweis und wählen d als Mittelpunkt von D' . Ist dann $D' = D(d, r)$ so sei S der Rand von $D(d, \frac{r}{2})$ und $d' \in S$ beliebig. Dann sind beide Inklusionen $S \subseteq D' \setminus \{d\}$ und $S \subseteq D \setminus \{d\}$ Homotopieäquivalenzen. Das Inverse ist gegeben durch $x \mapsto d + \frac{r(x-d)}{2|x-d|}$ und die Homotopie durch gradlinige Verbindung.

Insbesondere liefern die Inklusionen ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & \pi_1(S, d') & \\ \swarrow & & \searrow \\ \pi_1(D' \setminus \{d\}, d') & \xrightarrow{\quad} & \pi_1(D \setminus \{d\}, d') \end{array}$$

aus Isomorphismen. Aber die Inklusion $D' \setminus \{d\} \subseteq D \setminus \{d\}$ faktorisiert als $D' \setminus \{d\} \subseteq f^{-1}(B) \setminus \{d\} \subseteq D \setminus \{d\}$, sodass in der Komposition

$$\pi_1(D' \setminus \{d\}, d') \rightarrow \pi_1(f^{-1}(B) \setminus \{d\}, d') \xrightarrow{f_*} \pi_1(B \setminus \{f(d)\}, f(d'))$$

die erste Abbildung injektiv ist, und die zweite ein Isomorphismus. Und damit $\pi_1(B \setminus \{f(d)\}, f(d')) \neq 0$. Aber da $B \setminus \{f(d)\}$ genau wie oben homotopieäquivalent zu einer Sphäre um $f(d)$ ist, und diese homöomorph zu S^{n-1} , folgt hieraus auch $\pi_1(S^{n-1}, e) \neq 0$ (für irgendeinen Punkt e) und damit $n - 1 = 1$ nach den Berechnungen der Vorlesung wie gewünscht. $\square$

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Zeigen sie, dass die Konkatenationsoperationen

$$*_i, *_j: \pi_n(B, b) \times \pi_n(B, b) \longrightarrow \pi_n(B, b)$$

für $1 \leq i, j \leq n$ immer übereinstimmen.

Lösungsvorschlag. Ich hoffe es ist klar, dass es reicht den Fall $i = 1, j = 2 = n$ zu behandeln, alle anderen ergeben sich dann, indem man Dummykoordinaten hinzufügt.

Als dann konstruieren wir zwei stückweise lineare Homotopien, eine die die untere Hälfte des Quadrates in das linke untere Viertel, und die obere Hälfte ins rechte obere Viertel quetscht. Und ganz ähnlich eine, die die linke Hälfte in die linke untere Ecke und die rechte Hälfte in die obere rechte Ecke quetscht. Konkatenation der ersten mit dem umgekehrten der zweiten liefert dann alles, was wir wollen.

In Formeln ist die erste Homotopie gegeben durch

$$H: [0, 1]^2 \times [0, 1] \rightarrow B, \quad (s, t, u) \mapsto \begin{cases} f(2s, (1-u)t + 2ut) \\ g(2s-1, (1-u)t + u(2t-1)) \\ b \end{cases} = \begin{cases} f(2s, t(1+u)) & s \leq \frac{1}{2}, t \leq \frac{1}{1+u} \\ g(2s-1, t(1+u)-u) & s \geq \frac{1}{2}, t \geq \frac{u}{1+u} \\ b & \text{sonst} \end{cases}$$

sie startet bei $f *_1 g$ und endet bei

$$(s, t) \mapsto \begin{cases} f(2s, 2t) & s, t \leq \frac{1}{2} \\ g(2s-1, 2t-1) & s, t \geq \frac{1}{2} \\ b & \text{sonst} \end{cases}$$

und die zweite analog durch

$$G: [0, 1]^2 \times [0, 1] \rightarrow (s, t, u) \mapsto \begin{cases} f(s(1+u), 2t) & t \leq \frac{1}{2}, s \leq \frac{1}{1+u} \\ g(s(1+u) - u, 2t - 1) & t \geq \frac{1}{2}, s \geq \frac{u}{1+u} \\ b & \text{sonst} \end{cases}$$

sie startet bei $f *_2 g$ und endet bei der gleichen Funktion wie H . G umdrehen, umrühren, fertig. $\square$

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass lokaltriviale Abbildungen $\pi: E \rightarrow B$ die Eigenschaft haben, dass es zu jedem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (\{0\} \times [0, 1]^n) \cup ([0, 1] \times \partial[0, 1]^n) & \xrightarrow{g} & E \\ \text{incl} \downarrow & & \downarrow \pi \\ [0, 1]^{n+1} & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

eine Abbildung $h: [0, 1]^{n+1} \rightarrow E$ gibt, die beide Dreiecke zum kommutieren bringt.

1. Konstruieren Sie eine stetige Abbildung

$$r: [0, 1]^{n+1} \rightarrow (\{0\} \times [0, 1]^n) \cup ([0, 1] \times \partial[0, 1]^n),$$

die auf $(\{0\} \times [0, 1]^n) \cup ([0, 1] \times \partial[0, 1]^n)$ die Identität ist.

2. Benutzen das um den Fall zu erledigen, in dem f in einer trivialisierende Teilmenge von B landet.
3. Benutzen Sie das Lebesgue'sche Lemma um den Hyperwürfel $[0, 1]^{n+1}$ fein genug zu unterteilen, um den allgemeinen Fall auf der vorigen zu reduzieren.

Lösungsskizze. 1. Eine solche Abbildung r erhält man zum Beispiel, indem man den Punkt $p = (2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ betrachtet (er schwebt mittig über dem Würfel) und dann ein $x \in [0, 1]^{n+1}$ auf den Schnittpunkt der Geraden durch p und x mit $J_{n+1} = (\{0\} \times [0, 1]^n) \cup ([0, 1] \times \partial[0, 1]^n)$ sendet. Diese Gerade ist natürlich durch $t \mapsto p + t(x - p)$ gegeben, und ihr Schnitt mit J_{n+1} ist bei

$$t = \frac{1}{\max(1 - \frac{x_0}{2}, |2x_1 - 1|, \dots, |2x_n - 1|)},$$

wie man leicht nachrechnet: der Parameter $t = \frac{1}{1 - \frac{x_0}{2}}$ entspricht dem Schnittpunkt mit der Hyperebene

$\{0\} \times \mathbb{R}^n$, und die Parameter $t = \frac{\pm 1}{2x_i - 1}$ liefern die Schnittpunkte mit den Hyperebenen bei denen die i -te Koordinate 0 bzw. 1 ist und dann nehmen wir das kleinste solche t . Nennen wir diese Zahl $\lambda(x)$, können wir also

$$r(x) = p + \lambda(x)(x - p)$$

benutzen, offenbar stetig.

2. Wählen wir eine Karte (U, φ) von π , in der f landet, so erhalten wir

$$\begin{array}{ccccc} (\{0\} \times [0, 1]^n) \cup ([0, 1] \times \partial[0, 1]^n) & \xrightarrow{g} & \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times F \\ \text{incl} \downarrow & & \downarrow \pi & \swarrow \text{pr}_1 & \\ [0, 1]^{n+1} & \xrightarrow{f} & U & & \end{array}$$

Wir können dann die Abbildung

$$\tilde{h}: [0, 1]^{n+1} \longrightarrow U \times F, \quad x \longmapsto (f(x), \varphi_2(g(r(x))))$$

betrachten (wo $\varphi_2 = \text{pr}_2 \circ \varphi$), welche offenbar f hochhebt und $\varphi \circ g$ fortsetzt. Dann ist $h = \varphi^{-1} \circ \tilde{h}$ die gesuchte Abbildung.

3. Gemäß Lebesgue'schem Lemma, gibt es ein $\epsilon > 0$, sodass f jede ϵ -Kugel in eine Menge einer trivialisierenden Überdeckung von B abbildet. Wir wählen nun ein $m \in \mathbb{N}$ groß genug, sodass der Würfel $[0, 1/m]^n$ mit Kantenlänge $1/m$ Durchmesser kleiner ϵ hat (also $\frac{\sqrt{n}}{m} < \epsilon$). Unterteile nun $[0, 1]^n$ in die offensichtlichen m^n Würfel mit Kantenlänge $1/m$ und Eckpunkten auf dem Gitter $1/m \cdot \mathbb{Z}^n$. Wir erweitern g nun Schicht für Schicht, wobei die i -te Schicht aus allen Würfeln bestehe, deren erste Koordinate $[i/m, (i+1)/m]$ ist. Sei also eine Erweiterung h von g schon auf $[0, i/m] \times [0, 1]^n \cup [0, 1] \times \partial[0, 1]^{n+1}$ und einer Ansammlung von Würfeln der i -ten Schicht gegeben. Wählen wir uns dann einen weiteren Würfel W , so ist h sicher schon auf dem Boden $B = W \cap (\{i/m\} \times [0, 1]^n)$ von W gegeben, und auf einer (nicht weiter bekannten) Anzahl seiner Seitenwände, aber sicherlich nicht auf dem Deckel $W \cap (\{(i+1)/m\} \times [0, 1]^n)$. Wir erweitern h nun auf alle Seitenwände von W . Dann haben wir uns in die Situation des vorigen Aufgabenpunktes gebacht, und erhalten eine Erweiterung h auf ganz W wie gewünscht.

Um h auf die Seitenwände von W zu erweitern gehen wir induktiv über die Dimension k vor: Wir erweitern h zuerst auf alle $[i/m, (i+1)/m] \times V$, wo $V \subset B$ ein $(k-1)$ -dimensionaler Randwürfel von B ist. Für $k=0$ ist hierbei nichts zu tun, und für V von Dimension $k+1$, haben wir hier wieder genau ein Erweiterungsproblem vor uns, das wir schon in Aufgabenteil 2 gelöst haben, da alle Seitenwände von $[i/m, (i+1)/m] \times V$ von der Form $[i/m, (i+1)/m] \times V'$ mit V' von kleinerer Dimension sind.

□

Aufgabe 4 (5 Punkte)

1. Benutzen Sie die vorige Aufgabe um zu zeigen, dass für eine lokal triviale Abbildung $\pi: E \rightarrow B$ und ein $e \in E$ die Sequenz

$$\pi_1(E_{\pi(e)}, e) \xrightarrow{\text{incl}_*} \pi_1(E, e) \xrightarrow{\pi_*} \pi_1(B, \pi(e))$$

exakt in der Mitte ist, also das Bild der linken Abbildung genau der Kern der rechten ist.

2. Benutzen Sie das um $\pi_1(\text{SU}(n), \mathbb{I}_n) = \{e\}$ und $\pi_1(\text{U}(n), \mathbb{I}_n) = \mathbb{Z}$ zu zeigen.

Zu Erinnerung: Die Evaluation $\text{U}(n+1) \rightarrow S^{2n+1}, A \mapsto A \cdot e_1$ ist ein Faserbündel mit typischer Fasern $\text{U}(n)$, und ebenso mit speziellen unitären Gruppen.

Lösungsskizze. 1. Zunächst ist natürlich für jede Schleife $\gamma: [0, 1] \rightarrow E_{\pi(e)}$ die Komposition $\pi \circ \gamma$ konstant mit Wert e , sodass die Komposition der beiden Abbildungen trivialerweise konstant ist, und damit das Bild von incl_* im Kern von π_* enthalten.

Für die umgekehrte Inklusion, sei $\gamma: [0, 1] \rightarrow E$ eine Schleife bei e , sodass $\pi \circ \gamma$ nullhomotop relativ Rand ist, etwa via einer Homotopie f (das passt dann zur Terminologie der vorigen Aufgabe). Wir müssen zeigen, dass dann γ homotop relativ Rand zu einer Schleife in $E_{\pi(e)}$ ist. Betrachte dafür die Abbildung $g: (\{0\} \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{0\}) \rightarrow E$ die auf $\{0\} \times [0, 1]$ einfach durch γ gegeben und auf den anderen Bestandteilen konstant mit Wert e sei. Es ist dann offenbar $\pi \circ g = f$. Daher existiert nach der vorigen Aufgabe eine Abbildung $h: [0, 1]^2 \rightarrow E$, die g erweitert und f hochhebt. Da aber $f(-, 1): [0, 1] \rightarrow B$ die konstante Abbildung mit Wert $\pi(e)$ ist, haben wir also $h(-, 1): [0, 1] \rightarrow E_{\pi(e)}$, was die gesuchte, per Konstruktion zu γ homotope Schleife ist.

2. Wir beobachten zuerst, dass $\text{U}(1) = \{a \in \mathbb{C} \mid a \cdot \bar{a} = 1\} = S^1$ gilt, und $\text{SU}(1) = \{1\}$; diese beiden Gruppen haben also schonmal die korrekten Fundamentalgruppen. Mittels Hinweis erhalten wir exakte Sequenzen

$$\pi_1(\text{SU}(n), \mathbb{I}_n) \longrightarrow \pi_1(\text{SU}(n+1), \mathbb{I}_n) \longrightarrow \pi_1(S^{2n+1}, e_1) \quad \text{und} \quad \pi_1(\text{U}(n), \mathbb{I}_n) \longrightarrow \pi_1(\text{U}(n+1), \mathbb{I}_n) \longrightarrow \pi_1(S^{2n+1}, e_1)$$

wobei jeweils der rechte Term gemäß Vorlesung verschwindet. Das bedeutet aber wegen der Exaktheit der Sequenzen genau, dass die linken Abbildungen surjektiv sind. Induktiv bedeutet das, dass auch

$$\pi_1(\text{SU}(1), \mathbb{I}_n) \longrightarrow \pi_1(\text{SU}(n+1), \mathbb{I}_n) \quad \text{und} \quad \pi_1(\text{U}(1), \mathbb{I}_n) \longrightarrow \pi_1(\text{U}(n+1), \mathbb{I}_n)$$

surjektiv sind, was im linken Falle direkt $\pi_1(\text{SU}(n+1), \mathbb{I}_n) = 0$ liefert. Im rechten Falle lernen wir, beobachten wir noch, dass die Abbildung auch injektiv ist: Denn die Komposition

$$\text{U}(1) \xrightarrow{\text{incl}} \text{U}(n+1) \xrightarrow{\det} S^1$$

ist offenbar die Identität, sodass das auch für

$$\pi_1(\mathrm{U}(1), \mathbb{I}_n) \longrightarrow \pi_1(\mathrm{U}(n+1), \mathbb{I}_n) \xrightarrow{\det} \pi_1(\mathrm{S}^1, 1)$$

gilt, was die gewünschte Injektivität erzwingt.

Eine zweite Möglichkeit, den Fall der unitären Gruppen zu erhalten, ist zu bemerken, dass die Komposition

$$\mathrm{U}(1) \times \mathrm{SU}(n) \longrightarrow \mathrm{U}(n) \times \mathrm{U}(n) \xrightarrow{\quad \cdot \quad} \mathrm{U}(n)$$

ein Homöomorphismus, sogar Diffeomorphismus, ist (bijektiv und kompakt nach Hausdorff'sch).

□