

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Zeigen Sie: Gibt es einen Homöomorphismus $f: U \rightarrow V$, wobei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^2$ offen sind, so folgt $n = 2$.

Hinweis: Zum Beispiel kann man sich eine Scheibe $D \subseteq V$ hernehmen, dann einen Ball $B \in f(D)$ und eine weitere Scheibe $D' \subseteq f^{-1}(B)$ und die Inklusion $D' \setminus \{d\} \subseteq D \setminus \{d\}$ für ein $d \in D'$ im Bezug auf Fundamentalgruppen betrachten.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Zeigen sie, dass die Konkatenationsoperationen

$$*_i, *_j: \pi_n(B, b) \times \pi_n(B, b) \longrightarrow \pi_n(B, b)$$

für $1 \leq i, j \leq n$ immer übereinstimmen.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass lokaltriviale Abbildungen $\pi: E \rightarrow B$ die Eigenschaft haben, dass es zu jedem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (\{0\} \times [0, 1]^n) \cup ([0, 1] \times \partial[0, 1]^n) & \xrightarrow{g} & E \\ \text{incl} \downarrow & & \downarrow \pi \\ [0, 1]^{n+1} & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

eine Abbildung $h: [0, 1]^{n+1} \rightarrow E$ gibt, die beide Dreiecke zum kommutieren bringt. Zeigen Sie dazu:

1. Konstruieren Sie eine stetige Abbildung

$$r: [0, 1]^{n+1} \rightarrow (\{0\} \times [0, 1]^n) \cup ([0, 1] \times \partial[0, 1]^n),$$

die auf $(\{0\} \times [0, 1]^n) \cup ([0, 1] \times \partial[0, 1]^n)$ die Identität ist.

2. Benutzen das um den Fall zu erledigen, in dem f in einer trivialisierende Teilmenge von B landet.
3. Benutzen Sie das Lebesgue'sche Lemma um den Hyperwürfel $[0, 1]^{n+1}$ fein genug zu unterteilen, um den allgemeinen Fall auf der vorigen zu reduzieren.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

1. Benutzen Sie die vorige Aufgabe um zu zeigen, dass für eine lokal triviale Abbildung $\pi: E \rightarrow B$ und ein $e \in E$ die Sequenz

$$\pi_1(E_{\pi(e)}, e) \longrightarrow \pi_1(E, e) \longrightarrow \pi_1(B, \pi(e))$$

exakt in der Mitte ist, also das Bild der linken Abbildung genau der Kern der rechten ist.

2. Benutzen Sie das um $\pi_1(\text{SU}(n)) = \{e\}$ und $\pi_1(\text{U}(n)) = \mathbb{Z}$ zu zeigen.

Zu Erinnerung: Die Evaluation $\text{U}(n+1) \rightarrow S^{2n+1}, A \mapsto A \cdot e_1$ ist ein Faserbündel mit typischer Fasern $\text{U}(n)$, und ebenso mit speziellen unitären Gruppen.