

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Es sei

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & B & \end{array}$$

ein kommutatives Diagram stetiger Abbildungen. Zeigen Sie:

1. Sind p und p' Überlagerungen und B lokal zusammenhängend, so ist auch f eine Überlagerung.
2. Sind f und p' Überlagerungen und B lokal einfach zusammenhängend, so ist auch p eine Überlagerung.

Anmerkung: Ohne irgendwelche Annahme an B sind beide Schlüsse falsch, finden Sie Gegenbeispiele?

Lösungsvorschlag. 1. Sei nämlich $e' \in E'$ beliebig. Dann finden wir, weil p und p' Überlagerungen sind, offene $p'(e') \in V$, $V' \subseteq B$ zusammen mit Homöomorphismen

$$\varphi: p^{-1}(V) \longrightarrow V \times E_{p'(e')} \quad \text{und} \quad \varphi': (p')^{-1}(V') \longrightarrow V' \times E'_{p'(e')}.$$

deren Projektion auf die erste Koordinate p beziehungsweise p' ist, und deren Einschränkungen auf $E_{p'(e')}$ beziehungsweise $E'_{p'(e')}$ die Identität sind. Es sei dann $U' = (\varphi')^{-1}((V \cap V') \times \{e'\}) \subseteq E'$. Das ist schonmal eine offene Umgebung von e' und wir würden nun gern einen Homöomorphismus

$$\psi: f^{-1}(U') \longrightarrow U' \times f^{-1}(e')$$

angeben, dessen erste Komponente einfach f ist.

Aber per Konstruktion gilt

$$f^{-1}(U') \subseteq p^{-1}(V \cap V') \xrightarrow{\varphi} (V \cap V') \times E_{p'(e')},$$

wobei die zweite Abbildung eben ein Homöomorphismus ist. Nun gilt $f^{-1}(e') \subseteq (p' \circ f)^{-1}(p'(e')) = p^{-1}(p'(e')) = E_{p'(e')}$ und wir wären fertig, wenn das Bild der obigen Abbildung genau $(V \cap V') \times f^{-1}(e')$ ist: Dann können wir nämlich ihre zweite Komponente in unserem gesuchten Homöomorphismus ψ verwenden; die Umkehrabbildung ist einfach durch $(u', e) \mapsto (\varphi^{-1}(p'(u'), e))$ gegeben: Für die Komposition, die in $f^{-1}(U')$ startet, rechnet man nämlich

$$e \longmapsto (f(e), \varphi_2(e)) \longmapsto \varphi^{-1}(p'(f(e)), \varphi_2(e)) = \varphi^{-1}(p(e), \varphi_2(e)) = \varphi^{-1}(\varphi(e)) = e$$

und für die in $U' \times f^{-1}(e')$ startende hat man

$$(u', e) \longmapsto \varphi^{-1}(p'(u'), e) \longmapsto (f(\varphi^{-1}(p'(u'), e)), e),$$

sodass noch $f(\varphi^{-1}(p'(u'), e)) = u'$ zu prüfen bleibt. Aber Seiten haben offenbar das gleiche Bild unter p' , da

$$p'(f(\varphi^{-1}(p'(u'), e))) = p(\varphi^{-1}(p'(u'), e)) = \text{pr}_1(p'(u'), e) = p'(u')$$

und $p': U' \rightarrow V \cap V'$ ist ja offenbar injektiv.

Aber im allgemeinen muss $\varphi(f^{-1}(U'))$ eben nicht $(V \cap V') \times f^{-1}(e')$ sein. Wir haben ja aber auch noch nicht verwendet, dass B als lokal zusammenhängend angenommen ist. Damit können wir nämlich ein zusammenhängende Umgebung $p'(e') \in W \subseteq V \cap V'$ finden und $U = (\varphi')^{-1}(W \times \{e'\})$, was dann natürlich ebenfalls zusammenhängt. Es bildet dann f die Zusammenhangskomponenten von $p^{-1}(W)$, welche genau durch $\varphi^{-1}(W \times \{e\})$ gegeben sind, homöomorph auf die Zusammenhangskomponenten $(\varphi')^{-1}(W \times \{f(e)\})$ ab (das muss ohne den Zusammenhang von W eben nicht gelten). Und das erzwingt, dass das Bild von

$$f^{-1}(U) \subseteq p^{-1}(W) \xrightarrow{\varphi} W \times E_{p'(e')}$$

genau $W \times f^{-1}(e')$ ist und damit funktioniert dann alles:

Dass das Bild hierin enthalten ist, folgt unmittelbar, und für ein $e \in f^{-1}(U)$ betrachte die Zusammenhangskomponente von e in $p^{-1}(W)$. Diese ist per Konstruktion durch $\varphi^{-1}(W \times \{\varphi_2(e)\})$ gegeben, wird also einerseits auf $U = (\varphi')^{-1}(W \times \{e'\})$ (weil sie ja e enthält) abgebildet und andererseits auf $(\varphi')^{-1}(W \times \{f(\varphi_2(e))\})$ (weil sie ja $\varphi_2(e)$ enthält). Diese beiden Mengen müssen also übereinstimmen, was $f(\varphi_2(e)) = e'$ erzwingt, also $\varphi_2(e) \in f^{-1}(e')$, wie gewünscht.

2. Sei hierfür $b \in B$. Da B lokal einfach zusammenhängend ist, finden wir insbesondere eine einfach zusammenhängende Umgebung U von b . Nach dem Klassifikationssatz ist dann $p': (p')^{-1}(U) \rightarrow U$ eine triviale Überlagerung, also gibt es einen Homöomorphismus $\varphi: (p')^{-1}(U) \rightarrow U \times (p')^{-1}(b)$, dessen erste Koordinate p' ist. Und jede Komponente W von $(p')^{-1}(U)$ ist homöomorph zu U , also ebenfalls wieder einfach zusammenhängend, und damit ist $f: f^{-1}(W) \rightarrow W$ ebenfalls trivial. Wählen wir also einen Homöomorphismus $\psi: f^{-1}(W) \rightarrow W \times f^{-1}(w)$ mit erster Komponente f für $w \in (p')^{-1}(b) \cap W$, so können wir ihn mit $p' \times \text{id}$ zu einem Homöomorphismus $f^{-1}(W) \rightarrow U \times f^{-1}(w)$ mit erster Komponente p komponieren. Diese fügen sich nun genau zu einem Homöomorphismus

$$p^{-1}(U) = f^{-1}((p')^{-1}(U)) \xrightarrow{\psi} U \times f^{-1}((p')^{-1}(b)) = U \times p^{-1}(b)$$

mit erster Komponente p zusammen.

Gegenbeispiele sind gar nicht so leicht zu finden (und es gab natürlich volle Punkte für die Nachweise oben). Die erste Behauptung gilt nämlich ohne Annahme an B auch wenn nur p endlich-blättrig ist (den Beweis finden Sie in den meisten Büchern über Überlagerungen). Man kann als Gegenbeispiel etwa $B = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ wählen $E = B \times \mathbb{N}$, $E = B \times \{0, 1\}$ mit p und p' jeweils die Projektion auf die erste Koordinate und

$$f: B \times \mathbb{N} \rightarrow B \times \{0, 1\}, \quad (\alpha, k) \mapsto \begin{cases} (\frac{1}{k}, 0) & \alpha = \frac{1}{k} \\ (\alpha, \min(1, k)) & \text{sonst} \end{cases}$$

Dass f stetig ist, darf man auf den offenen Mengen $b \times \{n\}$ einzeln prüfen, wo es hoffentlich offensichtlich ist. Und jede Umgebung U von $(0, 0)$ enthält fast alle Punkte der Form $(\frac{1}{k}, 0)$ und $(0, 0)$ hat ein Urbild, aber jedes $(\frac{1}{k}, 0)$ hat zwei, es kann also auf U keine Karte geben.

Für die zweite Behauptung stimmt die Behauptung ohne jede Annahme an B , schon dann wenn p' endlich-blättrig ist (wieder finden sich Beweise in den meisten Büchern). Ein Gegenbeispiel ist Example 2.7 hier beschrieben: <https://www.math.uchicago.edu/%7Emay/VIGRE/VIGRE2008/REUPapers/Jerzak.pdf>. $\square$

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Es sei $p: E \rightarrow B$ eine Überlagerung mit B lokal und global wegzusammenhängend und $b \in B$. Konstruieren Sie Bijektionen

1. zwischen den Schnitten von p und den Fixpunkten $\{e \in E_b \mid e \cdot \gamma = e \text{ für alle } \gamma \in \pi_1(B, b)\}$, und
2. zwischen den Wegekompontenten von E und den Orbits $E_b/\pi_1(B, b)$.

Achtung: Es fehlte in der Aufgabe der lokale Wegzusammenhang von B . Ohne ihn ist der erste Aufgabenteil nicht korrekt, die Überlagerungen des Warschauer Kreises liefern Gegenbeispiele.

Lösungsvorschlag. 1. Ein Schnitt ist das gleiche wie eine Bündelabbildung von id_B zu p , und diese entspricht nach den Sätzen der Vorlesung genau einer $\pi_1(B, b)$ -äquivalenten Abbildungen $\{b\} \rightarrow E_b$, und diese entsprechen offenbar genau den Fixpunkten (durch extrahieren ihres Werts). Insbesondere ist die gesuchte Bijektion einfach $\sigma \mapsto \sigma(b)$.

2. Die gesuchte Abbildung $E_b/\pi_1(B, b) \rightarrow \pi_0(E)$ ist einfach durch $[e] \mapsto [e]$ gegeben. Das ist wohldefiniert weil ja e und $e \cdot [\gamma]$ per Definition durch den Weg $\tilde{\gamma}_e$ verbunden sind. Surjektivität: Ist $e \in E$, so können wir uns per Annahme an B einen Weg von $p(e)$ zu b schnappen und mit Startpunkt e hochheben. Wir erhalten einen Weg von e in zu einem $e' \in E_b$, welches offenbar das gesuchte Urbild ist. Injektivität: Wenn $e, e' \in E_b$ in E durch einen Weg w verbunden werden können, so gilt offenbar $e' = e \cdot [p \circ w]$ und damit $[e] = [e']$ in der Quelle. $\square$

Aufgabe 3 (5 Punkte)

1. Ist $p: E \rightarrow B$ lokal trivial mit lokal wegzusammenhängenden Fasern, so ist die Abbildung $p: E/\sim \rightarrow B$ eine Überlagerung, wobei $e \sim e'$ falls $p(e) = p(e')$ und $[e] = [e'] \in \pi_0(E_{p(e)})$ gilt.
2. Zeigen Sie, dass für $e \in E$ zwei Elemente γ, γ' in $\pi_1(B, p(e))$ genau dann gleich auf $\pi_0(E_{p(e)})$ wirken, wenn $\gamma^{-1}\gamma'$ im Bild von $\pi_1(E, e) \rightarrow \pi_1(B, p(e))$ liegt. Insbesondere ist $p_*: \pi_1(E, e) \rightarrow \pi_1(B, p(e))$ surjektiv, wenn die Fasern von p lokal und global wegzusammenhängend sind.
3. Benutzen Sie das um $\pi_1(\mathbb{CP}^n, \mathbb{C}e_1) = \{0\}$ für alle $n \geq 1$ zu folgern.

Lösungsvorschlag. 1. Ist (U, φ) eine Karte von p um b , so liefert φ einen Homöomorphismen

$$E/\sim|_U \longrightarrow (U \times E_b)/\sim$$

Die rechte Seite hat nun offenbar eine Bijektion auf $U \times \pi_0(E_b)$ und wir müssen noch prüfen, dass diese ein Homöomorphismus ist (wo wir $\pi_0(E_b)$ die diskrete Topologie geben!). Aufgrund des lokalen Wegzusammenhangs von E_b ist jede Wegekomponekte W von E_b offen, und damit auch $U \times W \subseteq U \times E_b$ und auf dieser Menge ist die Abbildung einfach durch die Projektion auf die erste Koordinate und eine konstante Abbildung in die zweite gegeben, sicherlich stetig. Und sicherlich ist für jedes $e \in E_b$ die Menge $U \times [e] \subseteq U \times \pi_0(E_b)$ offen, und auf dieser Menge ist die Umkehrabbildung einfach durch

$$U \times [e] \longrightarrow U \times \{e\} \subseteq U \times E_b \longrightarrow (U \times E_b)/\sim$$

ebenfalls offensichtlich stetig.

2. Aus den Sätzen der Vorlesung wissen wir, dass der Stabilisator $Stab_{[e]}$ gerade die charakteristische Untergruppe $p_*\pi_1(E/\sim, [e]) \rightarrow \pi_1(B, p(e))$ ist. Es bleibt also nur noch zu beobachten, dass die induzierte Abbildung $pr_*: \pi_1(E, e) \rightarrow \pi_1(E/\sim, [e])$ surjektiv ist. Aber ist $\gamma: [0, 1] \rightarrow E/\sim$ eine Schleife bei $[e]$, so ist $p \circ \gamma$ eine Schleife bei $p(e)$. Nach einer Aufgabe auf dem vorigen Zettel lässt sie sich zu einem Weg $\tilde{w}: [0, 1] \rightarrow E$ mit Startpunkt e hochheben. Und die Projektion $pr \circ \tilde{w}: [0, 1] \rightarrow E/\sim$ ist dann eine Hochhebung von γ , die bei $[e]$ startet. Es folgt also $\gamma = pr \circ \tilde{w}$ und damit insbesondere $[\tilde{w}(1)] = \gamma(1) = [e] \in \pi_0(E_b)$. Wählen wir uns einen Weg $v: [0, 1] \rightarrow E_b$ von $\tilde{w}(1)$ zu e ist $\tilde{w} * v: [0, 1] \rightarrow E$ das gesuchte Urbild von $[\gamma]$.
3. Es ist nach Vorlesung die Projektion $S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{CP}^n$ ein Faserbündel mit typischer Faser S^1 . Da die wegzusammenhängend ist, liefert der vorige Aufgabenteil, dass $\pi_1(S^{2n+1}, e_1) \rightarrow \pi_1(\mathbb{CP}^n, \mathbb{C}e_1)$ surjektiv ist. Aber schon die Quelle verschwindet gemäß für $n \geq 1$ (und für $n = 0$ ist wegen $\mathbb{CP}^0 = *$ sowieso nichts zu tun).

□

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Betrachten Sie innerhalb der Homöomorphismen den $\mathbb{R}^2$ die Untergruppe Γ , die von $(x, y) \mapsto (x+1, y)$ und $(x, y) \mapsto (1-x, y+1)$ erzeugt wird. Zeigen Sie:

1. Γ ist nicht abelsch.
2. Ihre Wirkung auf dem $\mathbb{R}^2$ ist fasernd, und der Quotient $K = \Gamma \backslash \mathbb{R}^2$ ist eine kompakte, glatte 2-dimensional Mannigfaltigkeit.

Anmerkung: K ist die *Klein'sche Flasche* (eine Fehlübersetzung von Klein'sche Fläche, machte sie wohl im englischen zur "Klein bottle" und mittlerweile hat sich diese etwas amüsante Bezeichnung auch im deutschen durchgesetzt). Aus den Ergebnissen der Vorlesung wird dann folgen, dass die Fundamentalgruppe von K isomorph zu Γ ist.

Lösungsskizze. 1. Offenbar gilt für die beiden Verknüpfungen

$$(0, 0) \mapsto (1, 0) \mapsto (0, 1) \quad \text{und} \quad (0, 0) \mapsto (1, 1) \mapsto (2, 1)$$

was nicht das gleiche Ergebnis ist.

2. Zunächst mal zeigen wir, dass die Wirkung von Γ frei ist. Jedes Element von Γ ist von der Form $(x, y) \mapsto ((-1)^n x + m, y + n)$ für $n, m \in \mathbb{Z}$, wie man leicht per Induktion sieht. Und es gilt $(x, y) = ((-1)^n x + m, y + n)$ nur bei $n = 0$ und dann $m = 0$.

Also Umgebung von (x, y) können wir nun also einfach die Menge $(x + y) +]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ wählen. Diese ist offenbar disjunkt von all ihren Translaten, was zeigt, dass die Wirkung fasernd ist. Bleibt nur noch zu zeigen, dass der Quotient hausdorff'sch ist: Aber der Orbit von (x, y) unter der Wirkung von Γ ist offenbar $(x, y) + \mathbb{Z}^2$ und ist (x', y') nicht darin, so hat (x', y') davon offenbar positiven Abstand (etwa weil höchstens 4 Punkte des Orbits überhaupt Abstand ≤ 1 haben) $\epsilon > 0$. Aber dann sind offenbar $D((x, y), \frac{\epsilon}{2}) + \mathbb{Z}^2$ und $D((x', y'), \frac{\epsilon}{2}) + \mathbb{Z}^2$ disjunkt und ihre Bilder sind offene (Quotienten nach Gruppenwirkung sind nach einem Satz der Vorlesung offene Abbildungen!) disjunkte Umgebungen von $[x, y]$ und $[x', y']$.

□