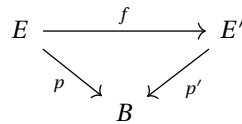


Aufgabe 1 (5 Punkte)

Es sei



ein kommutatives Diagram stetiger Abbildungen. Zeigen Sie:

1. Sind p und p' Überlagerungen und B lokal zusammenhängend, so ist auch f eine Überlagerung.
2. Sind f und p' Überlagerungen und B lokal einfach zusammenhängend, so ist auch p eine Überlagerung.

Anmerkung: Ohne irgendwelche Annahme an B sind beide Schlüsse falsch, finden Sie Gegenbeispiele?

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Es sei $p: E \rightarrow B$ eine Überlagerung mit B wegzusammenhängend und $b \in B$. Konstruieren Sie Bijektionen

1. zwischen den Schnitten von p und den Fixpunkten $\{e \in E_b \mid e \cdot \gamma = e \text{ für alle } \gamma \in \pi_1(B, b)\}$, und
2. zwischen den Wegekompontenten von E und den Orbits $E_b / \pi_1(B, b)$.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

1. Ist $p: E \rightarrow B$ lokal trivial mit lokal wegzusammenhängenden Fasern, so ist die Abbildung $p: E/\sim \rightarrow B$ eine Überlagerung, wobei $e \sim e'$ falls $p(e) = p(e')$ und $[e] = [e'] \in \pi_0(E_{p(e)})$ gilt.
2. Zeigen Sie, dass für $e \in E$ zwei Elemente γ, γ' in $\pi_1(B, p(e))$ genau dann gleich auf $\pi_0(E_{p(e)})$ wirken, wenn $\gamma^{-1}\gamma'$ im Bild von $\pi_1(E, e) \rightarrow \pi_1(B, p(e))$ liegt. Insbesondere ist $p_*: \pi_1(E, e) \rightarrow \pi_1(B, p(e))$ surjektiv, wenn die Fasern von p lokal und global wegzusammenhängend sind.
3. Benutzen Sie das um $\pi_1(\mathbb{CP}^n, \mathbb{C}e_1) = \{0\}$ für alle $n \geq 1$ zu folgern.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Betrachten Sie innerhalb der Homöomorphismen den $\mathbb{R}^2$ die Untergruppe Γ , die von $(x, y) \mapsto (x+1, y)$ und $(x, y) \mapsto (1-x, y+1)$ erzeugt wird. Zeigen Sie:

1. Γ ist nicht abelsch.
2. Ihre Wirkung auf dem $\mathbb{R}^2$ ist fasernd, und der Quotient $K = \Gamma \backslash \mathbb{R}^2$ ist eine kompakte, glatte 2-dimensional Mannigfaltigkeit.

Anmerkung: K ist die *Klein'sche Flasche* (eine Fehlübersetzung von Klein'sche Fläche, machte sie wohl im englischen zur "Klein bottle" und mittlerweile hat sich diese etwas amüsante Bezeichnung auch im deutschen durchgesetzt). Aus den Ergebnissen der Vorlesung wird dann folgen, dass die Fundamentalgruppe von K isomorph zu Γ ist.