Aufgabe 1

Sei X eine Menge mit schwacher Ordnung $\leq$. Wie in der Lösung von Blatt 1, Aufgabe 3 bereits gesehen, ist die Alexandrov-Topologie $\mathfrak{A}_\leq$ unter beliebigen Schnitten abgeschlossen: Für eine Familie $\mathcal{F} \subset \mathfrak{A}_\leq$ von offenen (also nach oben abgeschlossenen) Mengen sei $x \in \bigcap_{U \in \mathcal{F}} U$ und $x \leq y$. Dann ist $x \in U$ für jedes $U \in \mathcal{F}$, also auch $y \in U$, also ist $y \in \bigcap_{U \in \mathcal{F}} U$, und der Schnitt somit offen.

Sei also umgekehrt X eine Menge mit Topologie $\mathfrak{T}$, die unter beliebigen Schnitten abgeschlossen ist. Wir definieren eine schwache Ordnung $\leq$ auf X: Für $x, y \in X$ sei

$$x \leq y \Leftrightarrow \big(\forall U \in \mathfrak{T} : x \in U \Rightarrow y \in U\big).$$

Dies ist tatsächlich eine schwache Ordnung: Sie ist reflexiv, da $x \in U \Rightarrow x \in U$ ist, und transitiv, da für $x \leq y \leq z$ und ein $U \in \mathfrak{T}$ mit $x \in U$ folgt, dass $y \in U$, und somit $z \in U$ ist, also $x \leq z$.

Wir behaupten nun, dass die Alexandrov-Topologie $\mathfrak{A}_\leq$ gerade mit unserer Topologie $\mathfrak{T}$ übereinstimmt: Sei $V \in \mathfrak{A}_\leq$ nach oben abgeschlossen und $x \in V$: Dann ist $V_x = \{y \in X : x \leq y\} \subseteq U$. Es ist aber per Konstruktion der Ordnung gerade

$$V_x = \{y \in X : \forall U \in \mathfrak{T} : x \in U \Rightarrow y \in U\} = \bigcap_{x \in U \in \mathfrak{T}} U,$$

und da $\mathfrak{T}$ unter beliebigen Schnitten abgeschlossen ist, ist V_x somit eine bzgl. $\mathfrak{T}$ offene Umgebung von x, die in V enthalten ist: Da x beliebig war folgt, dass $V = \bigcup_{x \in V} V_x$ bzgl. $\mathfrak{T}$ offen ist.

Umgekehrt sei $V \in \mathfrak{T}$ offen. Dann ist V auch bzgl. $\leq$ nach oben abgeschlossen: Für $x \in V$ und $x \leq y$ ist ja gerade y in jeder bzgl. $\mathfrak{T}$ offenen Menge enthalten, in der x liegt, und V ist eine solche. Somit ist $y \in V$ und $V \in \mathfrak{A}_\leq$.

Für die Eindeutigkeit betrachten wir zwei schwache Ordnungen $\leq$ und $\leq'$ auf X mit $\mathfrak{A}_\leq = \mathfrak{A}_{\leq'}$. Sei $x \in X$ beliebig. Dann ist $V_x = \{y : x \leq y\} \in \mathfrak{A}_\leq = \mathfrak{A}_{\leq'}$, also ist V_x auch bzgl. $\leq'$ nach oben abgeschlossen: In anderen Worten ist für jedes y mit $x \leq' y$ auch $x \leq y$. Symmetrisch gilt auch die umgekehrte Implikation, also stimmen $\leq$ und $\leq'$ überein.

Bemerkung. Der Vollständigkeit halber erwähnen wir noch eine andere Charakterisierung der schwachen Ordnung, die wir definiert haben:

$$\begin{aligned}
x \leq y &\Leftrightarrow \big(\forall U \in \mathfrak{T} : x \in U \Rightarrow y \in U\big) \\
&\Leftrightarrow \big(\forall U \in \mathfrak{T} : y \in X \setminus U \Rightarrow x \in X \setminus U\big) \\
&\Leftrightarrow x \in \bigcap_{\substack{U \in \mathfrak{T} \\ y \in X \setminus U}} X \setminus U = \overline{\{y\}}
\end{aligned}$$

Für $x \in \overline{\{y\}}$ sagt man auch, dass x eine *Spezialisierung* von y ist (das ist ein Begriff aus der algebraischen Geometrie). Für T_1-Topologien ist unsere schwache Ordnung also trivial. Isbesondere ist eine T_1-Topologie nur dann unter beliebigen Schnitten abgeschlossen, wenn sie diskret ist.

Aufgabe 2

1. Wir zeigen zunächst, dass $f^*\mathfrak{T}$ tatsächlich eine Topologie ist:

   - Es ist $\emptyset = f^{-1}(\emptyset)$ und $Y = f^{-1}(X)$, also sind $\emptyset, Y \in f^*(\mathfrak{T})$.
   - Für $\mathcal{F} \subseteq f^*\mathfrak{T}$ gibt es also für jedes $U \in \mathcal{F}$ ein $V_U \in \mathfrak{T}$ mit $U = f^{-1}(V_U)$. Dann ist aber

     $$\bigcup_{U \in \mathcal{F}} U = \bigcup_{U \in \mathcal{F}} f^{-1}(V_U) = f^{-1}\left(\bigcup_{U \in \mathcal{F}} V_U\right),$$

     und da $\mathfrak{T}$ unter beliebigen Vereinigungen abgeschlossen ist, folgt $\bigcup_{U \in \mathcal{F}} U \in f^*\mathfrak{T}$.
   - Für $U_1, U_2 \in f^*\mathfrak{T}$ gibt es $V_1, V_2 \in \mathfrak{T}$ mit $U_{1/2} = f^{-1}(V_{1/2})$. Dann ist

     $$U_1 \cap U_2 = f^{-1}(V_1) \cap f{-}1(V_2) = f^{-1}(V_1 \cap V_2),$$

     und da $\mathfrak{T}$ unter paarweisen Schnitten abgeschlossen ist, folgt $U_1 \cap U_2 \in f^*\mathfrak{T}$.

Per Konstruktion besteht $f^*\mathcal{T}$ gerade aus jenen Mengen, die eine Topologie auf Y enthalten muss, damit f bezüglich ihrer stetig ist. Da es selber eine Topologie ist, ist es auch die kleinste solche.

2. Sei $g : Z \to Y$ eine Abbildung und $\mathcal{S}$ eine Topologie auf Z. Es ist

$$\begin{aligned} g \text{ stetig bzgl. } \mathcal{S} \text{ und } f^*\mathcal{T} &\Leftrightarrow \forall U \in f^*\mathcal{T} : g^{-1}(U) \in \mathcal{S} \\ &\Leftrightarrow \forall U \subseteq Y, V \in \mathcal{T} : \big(U = f^{-1}(V) \Rightarrow g^{-1}(U) \in \mathcal{S}\big) \\ &\Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{T} : (f \circ g)^{-1}(V) \in \mathcal{S} \\ &\Leftrightarrow f \circ g \text{ stetig bzgl. } \mathcal{S} \text{ und } \mathcal{T} \end{aligned}$$

3. Sei d eine Metrik auf X, $\mathcal{O}_d$ die von d erzeugte Topologie auf X, und f^*d die entlang f zurückgezogene Pseudometrik auf Y, also ist für $y, y' \in Y$

$$f^*d(y, y') = d\big(f(y), f(y')\big).$$

Wir bemerken zunächst, dass für $y \in Y$, $\varepsilon > 0$ gilt:

$$D_{f^*d}(y, \varepsilon) = \big\{y' \in Y : f^*d(y, y') < \varepsilon\big\} = \big\{y' \in Y : d(f(y), f(y')) < \varepsilon\big\} = f^{-1}\big(D_d(f(y), \varepsilon)\big).$$

Sei also $U \in \mathcal{O}_{f^*d}$. Dann gibt es für jedes $y \in U$ ein $\varepsilon > 0$ mit

$$f^{-1}\big(D_d(f(y), \varepsilon)\big) = D_{f^*d}(y, \varepsilon) \subseteq U.$$

Da alle $f^{-1}\big(D_d(f(y), \varepsilon)\big)$ offen bzgl. $f^*\mathcal{O}_d$ sind, muss dies dann auch für U gelten, also $U \in f^*\mathcal{O}_d$.

Genauso sei umgekehrt $U \in f^*\mathcal{O}_d$, also ist $U = f^{-1}(V)$ für ein $V \in \mathcal{O}_d$. Das heißt aber gerade, dass für jedes $y \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existieren muss, dass $D_d(f(y), \varepsilon) \subseteq V$. Dann ist aber auch

$$D_{f^*d}(y, \varepsilon) = f^{-1}\big(D_d(f(y), \varepsilon)\big) \subseteq f^{-1}(V) = U,$$

und somit $U \in \mathcal{O}_{f^*d}$.

Anders als Pseudometriken lassen sich Metriken nicht zurückziehen: Falls d eine Metrik ist, aber $y \neq y' \in Y$ mit $f(y) = f(y')$ existieren, ist $f^*d(y, y') = d(f(y), f(y')) = 0$. In anderen Worten: eine entlang f zurückgezogene Metrik ist genau dann wieder eine Metrik, wenn f injektiv ist.

Aufgabe 3

Als erstes machen wir ein paar Beobachtungen zu der Funktion

$$\begin{aligned} f : [0, \infty] &\longrightarrow [0, \infty] \\ x &\longmapsto \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}. \end{aligned}$$

Es gilt $f(0) = 0$, für $x < \infty$ ist f stetig und $f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$: Mit $f(\infty) = 1 > f(x)$ ist also f monoton. Als letztes bemerken wir noch, dass f subadditiv ist, also $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in [0, \infty]$. Wenn man möchte, folgt das aus $f^{(2)} < 0$, wir können es aber einfach kurz nachrechnen:

$$f(x) + f(y) = \frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} \leq \frac{x}{1+x+y} + \frac{y}{1+x+y} = f(x+y).$$

Nun bemerken wir, dass für jede monotone und subadditive Funktion $g : [0, \infty] \to [0, \infty]$ mit $g(0) = 0$ gilt: Wenn d eine Pseudometrik auf X ist, dann auch $g \circ d$: Seien dafür $x, y, z \in X$. Dann ist

- $g(d(x, x)) = g(0) = 0$,
- $g(d(x, y)) = g(d(y, x))$,

- $g(d(x,y))+g(d(y,z)) \leq g(d(x,y)+d(y,z)) \leq g(d(x,z))$, wobei wir zunächst Subadditivität und dann Monotonie benutzt haben.

Für unser f erhalten wir, dass wenn d eine Pseudometrik auf X ist, auch $\frac{d}{1+d}$ eine ist—das ist die (unbewiesene) Bemerkung I.2.4(2) im Skript.

Als letzte allgemeine Beobachtung sei für $n \in \mathbb{N}$ $\tilde{d}_n$ eine Pseudometrik auf X. Dann ist $\sum_{n\geq 1} \tilde{d}_n$ wieder eine Pseudometrik: Seien dafür $x,y,z \in X$. Dann ist

- $\sum_{n\geq 1} \tilde{d}_n(x,x) = \sum_{n\geq 1} 0 = 0$,
- $\sum_{n\geq 1} \tilde{d}_n(x,y) = \sum_{n\geq 1} \tilde{d}_n(y,x)$,
- $\sum_{n\geq 1} \tilde{d}_n(x,y) + \sum_{n\geq 1} \tilde{d}_n(y,z) = \sum_{n\geq 1} \left(\tilde{d}_n(x,y)+\tilde{d}_n(y,z)\right) \leq \sum_{n\geq 1} \tilde{d}_n(x,z)$.
  Dabei ist das Zusammenlegen der Summen möglich, weil alle Summanden nichtnegativ sind.

Sei nun für $n \in \mathbb{N}$ d_n eine Pseudometrik auf X. Wir betrachten

$$\begin{aligned}\mathrm{Fre}_d : X \times X &\longrightarrow [0,\infty]\\ (x,y) &\longmapsto \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{d_n(x,y)}{1+d_n(x,y)} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} f \circ d(x,y).\end{aligned}$$

Dann folgt aus unseren obigen Beobachtungen direkt, dass Fre_d wieder eine Pseudometrik ist.

Als nächstes sehen wir, dass $\mathcal{O}_{\mathrm{Fre}_d}$ alle Topologien $\mathcal{O}_{d_n}$ enthält: Sei $m \in \mathbb{N}$ und $U \in \mathcal{O}_{d_m}$ offen. Dann gibt es für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ mit $D_{d_m}(x,\varepsilon) \subseteq U$. Sei nun $y \in D_{\mathrm{Fre}_d}\left(x, \frac{\varepsilon}{2^m(1+\varepsilon)}\right)$: Dann ist

$$f\left(d_m(x,y)\right) \leq 2^m \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} f\left(d_n(x,y)\right) = 2^m \mathrm{Fre}_d(x,y) < 2^m \frac{\varepsilon}{2^m(1+\varepsilon)} = f(\varepsilon),$$

und mit der Monotonie von f ist auch $d_m(x,y) < \varepsilon$. Also ist $D_{\mathrm{Fre}_d}\left(x, \frac{\varepsilon}{2^m(1+\varepsilon)}\right) \subseteq D_{d_m}(x,\varepsilon) \subseteq U$, und U ist offen bezüglich Fre_d.

Nun bleibt nur noch zu zeigen, dass $\mathcal{O}_{\mathrm{Fre}_d}$ die kleinste solche Topologie ist. Wir zeigen dafür gleich folgendes:

Behauptung. Sei $x \in X$, $\varepsilon > 0$. Dann existieren $k \geq 1$ sowie $\delta > 0$ derart, dass

$$\bigcap_{n=1}^{k} D_{d_n}(x,\delta) \subseteq D_{\mathrm{Fre}_d}(x,\varepsilon)$$

Sei zunächst gegeben, dass die Behauptung stimmt, und $U \in \mathcal{O}_{\mathrm{Fre}_d}$ eine beliebige offene Menge. Dann gibt es für jedes $x \in U$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $D_{\mathrm{Fre}_d}(x,\varepsilon) \subseteq U$. Aus der Behauptung erhalten wir dann eine Beschreibung von U als Vereinigung (über alle x) von endlichen Schnitten von Bällen $D_{d_n}(x,\delta) \in \mathcal{O}_{d_n}$. Aber jede Topologie, die alle $\mathcal{O}_{d_n}$ enthält, muss alle solche Vereinigungen von endlichen Schnitten enthalten, und somit auch $\mathcal{O}_{\mathrm{Fre}_d}$, also ist $\mathcal{O}_{\mathrm{Fre}_d}$ minimal.

Nun also zum Beweis der Behauptung:

Beweis. Da die Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n}$ konvergiert, können wir ein $k \geq 1$ wählen mit $\sum_{n>k} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Zusätzlich wählen wir ein $\delta > 0$ mit $f(\delta) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Sei nun $y \in X$ derart, dass $d_n(x,y) < \delta$ für alle $1 \leq n \leq k$ ist. Dann ist

$$\begin{aligned}\mathrm{Fre}_d(x,y) &= \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} \cdot f\left(d_n(x,y)\right)\\ &= \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n} \cdot f\left(d_n(x,y)\right) + \sum_{n>k} \frac{1}{2^n} \cdot \underbrace{f\left(d_n(x,y)\right)}_{<1}\\ &< \underbrace{\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n}}_{<1} \cdot \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n>k} \frac{1}{2^n}\\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Damit haben wir aber gerade unsere Behauptung gezeigt. $\square$

Aufgabe 4

(1) Sei $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X, dann ist $\mathrm{Seq}(\mathcal{T})$ eine Topologie:

- $\emptyset$ und X sind sequentiell abgeschlossen (es gibt keine Folgen in $\emptyset$, und alle möglichen Grenzwerte liegen in X), also liegen die Komplemente X und $\emptyset$ in $\mathrm{Seq}(\mathcal{T})$.
- Sei $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{Seq}(\mathcal{T})$, dann ist
$$X \setminus \bigcup_{U \in \mathcal{F}} U = \bigcap_{U \in \mathcal{F}} X \setminus U.$$
Aber für eine Folge $a : \mathbb{N} \to \bigcap_{U \in \mathcal{F}} X \setminus U$, die gegen $x \in X$ konvergiert, ist dann insbesondere $x \in X \setminus U$ für jedes U, da diese Komplemente abgeschlossen sind. Also liegt x auch in dem Schnitt, somit ist $\bigcup_{U \in \mathcal{F}} U \in \mathrm{Seq}(\mathcal{T})$.
- Seien $U, V \in \mathrm{Seq}(\mathcal{T})$. Dann ist
$$X \setminus (U \cap V) = (X \setminus U) \cup (X \setminus V)$$
Sei nun $a : \mathbb{N} \to (X \setminus U) \cup (X \setminus V)$ eine Folge, die gegen $x \in X$ konvergiert. Dann muss mindestens eine der Mengen $X \setminus U$ und $X \setminus V$ unendlich viele Folgenglieder von a enthalten, und somit auch den Grenzwert x dieser Teilfolge: Also liegt auch x in $(X \setminus U) \cup (X \setminus V)$, somit ist $U \cap V \in \mathrm{Seq}(\mathcal{T})$.

Außerdem ist $\mathcal{T} \subseteq \mathrm{Seq}(\mathcal{T})$: Sei $U \in \mathcal{T}$ offen und $a : \mathbb{N} \to X \setminus U$ eine Folge. Sei $x \in U$: Dann ist U eine offene Umgebung von x, die keines der Folgenglieder von a enthält. Per Definition von Konvergenz kann dann x kein Grenzwert der Folge sein, also liegen alle Grenzwerte von Folgen in $X \setminus U$ selber in $X \setminus U$. Somit ist $U \in \mathrm{Seq}(\mathcal{T})$.

(2) Mit (1) genügt es zu zeigen, dass $\mathrm{Seq}(\mathcal{O}_d) \subseteq \mathcal{O}_d$. Sei also $U \in \mathrm{Seq}(\mathcal{O}_d)$, und $x \in U$. Dann muss es ein $\varepsilon > 0$ geben mit $D_d(x, \varepsilon) \subseteq U$: Andernfalls könnten wir für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ein $a_n \in D_d(x, \frac{1}{n}) \setminus U$ wählen, und hätten dann mit $a : \mathbb{N}_{\geq 1} \to X \setminus U$ eine Folge, deren Grenzwert x in U liegt. Das steht im Widerspruch zur sequentiellen Abgeschlossenheit von $X \setminus U$.

(3) Sei $\mathcal{T}_{\text{koabz}} = \{U \subseteq X : X \setminus U \text{ ist abzählbar}\} \cup \{\emptyset\}$ die koabzählbare Topologie auf X. Sei $a : \mathbb{N} \to X$ eine Folge, die bzgl. $\mathcal{T}_{\text{koabz}}$ gegen $x \in X$ konvergiert. Betrachte dann $U = (X \setminus \mathrm{im}(a)) \cup \{x\}$: Dann ist $X \setminus U$ abzählbar, also $x \in U \in \mathcal{T}_{\text{koabz}}$. Somit muss U fast alle Folgenglieder von a enthalten. Da wir aber alle Folgenglieder, die ungleich x waren, entfernt haben, muss $a_n = x$ für fast alle n sein.

Somit ist aber jede Teilmenge $A \subseteq X$ sequentiell abgeschlossen bzgl. $\mathcal{T}_{\text{koabz}}$: Eine Folge in A kann nur dann gegen x konvergieren, wenn sie den Wert selber annimmt, also $x \in A$. Damit ist $\mathrm{Seq}(\mathcal{T}_{\text{koabz}}) = \mathcal{P}(X)$, d.h., die Sequentialisierung der koabzählbaren Topologie ist die diskrete Topologie.

Sei nun $\mathcal{T}_{\text{koend}} = \{U \subseteq X : X \setminus U \text{ ist endlich}\} \cup \{\emptyset\}$ die koendliche Topologie auf X. Wir behaupten, dass $\mathcal{T}_{\text{koend}} = \mathrm{Seq}(\mathcal{T}_{\text{koend}})$: Nach (1) gilt $\subseteq$. Sei $A \subseteq X$ unendlich und sequentiell abgeschlossen bzgl. $\mathcal{T}_{\text{koend}}$. Wähle eine beliebige injektive Abbildung $a : \mathbb{N} \hookrightarrow A$. Dann gilt für jedes $x \in X$ und $x \in U \in \mathcal{T}_{\text{koend}}$, dass fast alle Folgenglieder von a in U liegen (da ja alle Folgenglieder verschieden sind, und überhaupt nur endlich viele Punkte nicht in U liegen). Also ist $x \in A$ als Grenzwert von a, und somit schon $A = X$. Also ist für jede sequentiell abgeschlossene Teilmenge A das Komplement bereits in $\mathcal{T}_{\text{koend}}$.