

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass eine Topologie \mathcal{T} auf einer Menge X genau dann stabil unter beliebigen Durchschnitten ist, wenn es eine schwache Ordnung \leq auf X gibt, derart dass $\mathcal{T} = \mathfrak{A}_{\leq}$ eine Alexandrov-Topologie ist. In diesem Falle ist \leq durch \mathcal{T} eindeutig bestimmt.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Es sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und $f: Y \rightarrow X$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

1. Es ist

$$f^*\mathcal{T} := \{U \subseteq Y \mid \text{es gibt ein } V \in \mathcal{T} \text{ mit } f^{-1}(V) = U\}$$

die kleinste Topologie auf Y ist, bezüglich der f stetig ist.

2. Für jeden topologischen Raum (Z, \mathcal{S}) ist eine Abbildung $g: Z \rightarrow Y$ genau dann stetig bezüglich \mathcal{S} und $f^*\mathcal{T}$ ist, wenn $f \circ g$ stetig bezüglich \mathcal{S} und \mathcal{T} ist.
3. Für jede Pseudometrik d auf X gilt $f^*\mathcal{O}_d = \mathcal{O}_{f^*d}$, wo $f^*d := d \circ (f \times f)$ die zurückgezogene Pseudometrik bezeichnet.

Wie sieht es aus, wenn man im letzten Punkt Metriken anstatt Pseudometriken betrachtet?

Man bemerke, dass für $Y \subseteq X$ und f die Inklusionsabbildung die Topologie $f^*\mathcal{T}$ genau die Teilraumtopologie aus der Vorlesung ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Ist $d: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{F}(X \times X, [0, \infty])$ eine Familie von Pseudometriken, so ist auch

$$\text{Fre}_d: X \times X \rightarrow [0, \infty], \quad (x, y) \mapsto \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{d_n(x, y)}{1 + d_n(x, y)}$$

eine Pseudometrik auf X und $\mathcal{O}_{\text{Fre}_d}$ ist die kleinste Topologie auf X , die alle Topologien \mathcal{O}_{d_n} enthält.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Ist X eine Menge und \mathcal{T} eine Topologie auf X , so nennen wir eine Teilmenge $M \subseteq X$ *sequentiell abgeschlossen*, wenn für jede Folge $\mathbb{N} \rightarrow M$, die gegen ein $x \in X$ konvergiert, schon $x \in M$ gilt. Zeigen Sie:

1. Es ist

$$\text{Seq}(\mathcal{T}) := \{U \subseteq X \mid X \setminus U \text{ ist sequentiell abgeschlossen bezüglich } \mathcal{T}\}$$

eine Topologie auf X , die sogenannte *Sequentialisierung* von \mathcal{T} , welche \mathcal{T} enthält.

2. Es gilt $\text{Seq}(\mathcal{O}_d) = \mathcal{O}_d$ für jede Pseudometrik d auf X .
3. Bestimmen Sie die Sequentialisierung der coabzählbaren Topologie auf X . Wie sieht es für die koendliche Topologie aus?

Zur Erinnerung: Eine Folge $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ konvergiert bezüglich einer Topologie \mathcal{T} auf X gegen ein $x \in X$, wenn es zu jedem $x \in U \in \mathcal{T}$ ein $k \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass für alle $n \geq k$ schon $f_n \in U$ gilt.