Aufgabe 1 (5 Punkte)

Finden Sie in $\mathrm{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ausgestattet mit der Topologie der punktweisen Konvergenz eine sequentiell abgeschlossene, aber nicht abgeschlossene Menge.

Anmerkung: Es ist also insbesondere die Sequentialisierung der Topologie der punktweisen Konvergenz eine zweite Topologie bezüglich derer eine Funktionenfolge genau dann konvergiert, wenn sie es punktweise tut.

Lösungsskizze. Das wohl einfachste Beispiel ist

$$\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\} \text{ ist abzählbar}\}:$$

Denn ist $i \mapsto f_i$ eine Folge in $\mathcal{F}$, so ist die Menge

$$F := \{x \in \mathbb{R} \mid f_i(x) \neq 0 \text{ für ein } i \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R} \mid f_i(x) \neq 0\}$$

nach Cantors Diagonalsatz wieder abzählbar. Es gilt also $f_i(x) = 0$ für alle $x \notin F$ und konvergiert f punktweise gegen eine Funktion g, so folgt damit sicher auch $g(x) = 0$ für alle $x \notin F$. Aber das heißt $\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq 0\} \subseteq F$, das ist also auch abzählbar und damit $g \in \mathcal{F}$. Damit ist $\mathcal{G}$ sequentiell abgeschlossen. Und $\mathcal{F}$ ist nicht abgeschlossen, sondern es gilt sogar $\overline{F} = \mathrm{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Denn ist $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebig und $g \in V \subseteq \mathrm{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ offen, so enthält U ja um g herum eine der Basismengen

$$\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x_i) \in U_i\}$$

für irgendwelche $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ and $\emptyset \neq U_1, \dots, U_n \subseteq \mathbb{R}$ offen. Aber jede solche Menge schneidet $\mathcal{F}$: Man kann ja einfach den Wert von $f(x_i)$ in U_i beliebig vorgeben und $f(x) = 0$ für alle $x \neq x_1, \dots, x_n$ setzen und erhält eine Funktion im Durchschnitt. □

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Zeigen Sie:

1. Für jede Filtrierung $\mathcal{F}$, also
$$0 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}_{i-1} \subseteq \mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_{i+1} \subseteq \cdots \subseteq M,$$
einer abelschen Gruppe M macht die $\mathcal{F}$-adische Topologie M zu einer topologischen abelschen Gruppe.

2. Für ein Ideal $I \subseteq R$ macht die I-adische Topologie, also die durch die Filtrierung
$$\mathcal{F}_i = \begin{cases} I^{-i} & i \leq 0 \\ R & i \geq 0 \end{cases}$$
induzierte R zu einem kommutativen topologischen Ring.

3. $\mathbb{Q}$ ist mit der Topologie der Filtrierung
$$\mathcal{G}_i = \begin{cases} (-i)! \cdot \mathbb{Z} & i \leq 0 \\ \mathbb{Z} & i \geq 0 \end{cases}$$
ein topologischer Ring und ein Körper, aber kein topologischer Körper.

Anmerkung: Für jeden R-Modul M liefert die I-adische Topologie auf M, also die von

$$\mathcal{H}_i = \begin{cases} I^{-i} \cdot M & i \leq 0 \\ M & i \geq 0 \end{cases}$$

induzierte, auch einen topologischen Modul über R (ebenfalls ausgestattet mit der I-adischen Topologie).

Achtung:

Ich habe hier die Formulierung des dritten Teils korrigiert, mehr dazu unten.

Lösungsskizze. 1. Wir müssen prüfen, dass die Addition $a\colon M\times M\to M$ und die Inversion $i\colon M\to M$ stetig sind. Dafür reicht es nach dem Lemma über Subbasen zu prüfen, dass die Urbilder der Mengen $x+\mathcal{F}_i\subseteq M$ unter diesen Abbildungen wieder offen sind. Für die Inversion ist das besonders einfach, weil offenbar

$$i^{-1}(x+\mathcal{F}_i)=-x+\mathcal{F}_i$$

gilt, und das ist sogar wieder in der Subbasis, die die $\mathcal{F}$-adische Topologie definiert. Und bezüglich der Addition gilt

$$a^{-1}(x+\mathcal{F}_i)=\bigcup_{m+n=x}(m+\mathcal{F}_i)\times(n+\mathcal{F}_i)$$

was als Vereinigung basisoffener Mengen der Produkttopologie wieder offen ist: Die rechte Seite ist in der linken enthalten da für $f,g\in\mathcal{F}_i$ sicherlich aus $m+n=x$ schon

$$m+f+n+g=x+f+g\in x+\mathcal{F}_i$$

gilt, und wenn umgekehrt $(m,n)\in a^{-1}(x+\mathcal{F}_i)$ gilt, also $m+n=x+f$ für ein $f\in\mathcal{F}_i$, so folgt

$$(m,n)\in(m+\mathcal{F}_i)\times(n-f+\mathcal{F}_i)$$

was wegen $m+n-f=x$ in der rechten Seite enthalten ist.

2. Nach der vorigen Aufgabe bleibt nur noch die Stetigkeit der Multiplikation $m\colon R\times R\to R$ zu prüfen. Machen wir das einmal in größerer Allgemeinheit, die gleich beim dritten Teil relevant wird: Ich behaupte, dass allgemein eine $\mathcal{F}$-adische Topologie R zu einem topologischen Ring genau dann, wenn

   a) es zu jedem $r\in R$ und $i\in\mathbb{Z}$ ein $j\in\mathbb{Z}$ mit $r\cdot\mathcal{F}_j\subseteq\mathcal{F}_i$ gibt, und
   b) zu jedem $i\in\mathbb{Z}$ ganze Zahlen j,k mit $\mathcal{F}_j\cdot\mathcal{F}_k\subseteq\mathcal{F}_i$.

   Ist insbesondere jedes $\mathcal{F}_i$ ein Ideal wie bei der I-adischen Filtrierung, so kann man hier einfach $j=i=k$ wählen und erhält die Aussage der Aufgabe.

   Zum Nachweis der Behauptung, beobachten wir zuerst, dass wenn m stetig bezüglich der $\mathcal{F}$-adischen Topologie ist, die Menge $m^{-1}(r+\mathcal{F}_i)\subseteq R^2$ offen und damit insbesondere eine Umgebung von $(r,1)$ ist. Aber dann muss sie eine der basisoffenen Mengen $(r+\mathcal{F}_k)\times(1+\mathcal{F}_j)$ enthalten, was sich zu

$$r+r\cdot\mathcal{F}_j+\mathcal{F}_k+\mathcal{F}_k\cdot\mathcal{F}_j\subseteq r+\mathcal{F}_i$$

   übersetzt und insbesondere $r\cdot\mathcal{F}_j\subseteq\mathcal{F}_i$ und $\mathcal{F}_k\cdot\mathcal{F}_j\subseteq\mathcal{F}_i$ impliziert.

   Und gilt wichtiger umgekehrt diese Bedingungen, und ist $(x,y)\in m^{-1}(r+\mathcal{F}_i)$, so wählen wir $k,l\in\mathbb{Z}$ mit $x\cdot\mathcal{F}_k, y\cdot\mathcal{F}_l, \mathcal{F}_k\cdot\mathcal{F}_l\subseteq\mathcal{F}_i$ (mit verschiedenen k und l in den ersten beiden und und der dritten Bedingung geht das per Annahme und dass man die Bedingungen für ein k und ein l gleichzeitig erfüllen kann, erreicht man dann einfach indem man jeweils das kleinere auswählt). Damit sehen wir dass

$$(x+\mathcal{F}_k)\cdot(y+\mathcal{F}_l)=x\cdot y+x\cdot\mathcal{F}_k+y\cdot\mathcal{F}_l+\mathcal{F}_k\cdot\mathcal{F}_l\subseteq r+\mathcal{F}_i$$

   wie behauptet.

3. Um zu sehen, dass man einen topologischen Ring for sich hat, müssen wir nur noch die beiden Bedingungen aus dem vorigen Punkt nachweisen. Sind aber $\frac{r}{s}\in\mathbb{Q}$ mit $r\in\mathbb{Z}$ und $s\in\mathbb{N}_{\geq 1}$ und $i\in\mathbb{N}$ gegeben, so gelten sicherlich

$$\tfrac{r}{s}\cdot(s+i)!\cdot\mathbb{Z}=\tfrac{r}{s}\cdot s!i!\binom{s+i}{i}\cdot\mathbb{Z}=r(s-1)!i!\binom{s+i}{i}\cdot\mathbb{Z}\subseteq i!\cdot\mathbb{Z}.$$

   und für die zweite Bedingung kann man offenbar etwa $j=i$ und $k=0$ wählen.

In der ursprünglichen Version der Aufgabe hatte ich dummerweise $i! \cdot \mathbb{Z}$ durch $p^i\mathbb{Z}$ für eine fixe Primzahl p ersetzt. Dann gilt die erste Bedingung aber nicht: Für eine andere Primzahl q gilt ja schließlich immer $\frac{p^j}{q} \in \frac{1}{q} \cdot p^j \cdot \mathbb{Z}$ aber nie $\frac{p^j}{q} \in p^i \cdot \mathbb{Z}$. Bezüglich dieser Filtrierung ist also $\mathbb{Q}$ kein topologischer Ring! Mea culpa.

Nun jedenfall zum Abschluss noch der Nachweis, dass die Abbildung

$$i\colon \mathbb{Q} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \quad x \longmapsto \frac{1}{x}$$

nicht stetig ist: Aber es ist ja $\mathbb{Z}$ eine der basisoffenen Mengen in der gegebenen Topologie auf $\mathbb{Q}$, damit $\mathbb{Z} \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ offen, aber

$$i^{-1}(\mathbb{Z} \setminus \{0\}) = \{\pm 1, \pm\tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{1}{3}, \dots\}$$

enthält Zahlen von (euklidischen) Abstand kleiner als 1 zueinandern, wohingegen das in keiner der basisoffenen Mengen $q + i!\mathbb{Z}$ der Fall ist. Es kann also $i^{-1}(1+\mathbb{Z})$ keine der basisoffenen Mengen enthalten, ist also ganz sicher nicht offen.

□

Aufgabe 3 (5 Punkte)

1. Zeigen Sie: Ist $\mathcal{F}$ eine Familie von Halbnormen auf einem reellen Vektorraum V, so macht die Topologie $\bigvee_{\|-\| \in \mathcal{F}} \mathcal{O}_{\|-\|} V$ zu einem topologischen $\mathbb{R}$-Vektorraum.

2. Wie sieht es bei der Produkt- und wie bei der Box-Topologie auf $\prod_{i \in I} \mathbb{R}$ für unendliches I aus? Wie bei dem Unterraum $\bigoplus_{i \in I} \mathbb{R}$? Stimmen die beiden Teilraumtopologien auf ihm überein?

Lösungsskizze. 1. Zunächst prüfen wir das für eine einzige Halbnorm. Ist dann $(x, y) \in V$ und $\epsilon > 0$ so folgt aus $\|v - x\|, \|w - y\| < \frac{\epsilon}{2}$ schon

$$|x + y - (v + w)\| \leq \|v - x\| + \|w - y\| < \epsilon,$$

was die Stetigkeit der Addition bei (x, y) bedeutet. Und die der Skalarmultiplikation bei (λ, x) daraus, dass $|\lambda - \mu| < \frac{\epsilon}{2\|x\|+2}$ und $\|x - y\| < \min\left(1, \frac{\epsilon}{2|\lambda|+1}\right)$ schon

$$\|\lambda x - \mu y\| = \|\lambda x - \lambda y + \lambda y - \mu y\| \leq |\lambda|\|x - y\| + |\lambda - \mu|\|y\| \leq |\lambda| \cdot \tfrac{\epsilon}{2|\lambda|+1} + \tfrac{\epsilon}{2\|x\|+2}\|y\| < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2\|x\|+2}(\|x\| + 1) = \epsilon$$

folgt. Wegen $(-1) \cdot x = -x$ folgt die der Inversion dann automatisch (das werden wir unten noch ein paar Mal benutzen).

Gemäß des Stetigkeitstests für erzeugte Topologien müssen wir im Fall einer Familie von Halbnormen $\mathcal{F}$ nur prüfen, dass die drei Abbildungen $+\colon V \times V \to V, -\colon V \to V$ und $\cdot\colon V \times \mathbb{R} \to V$ stetig sind, wenn wir die Quellen mit der von der Topologie aus der Aufgabe induzierten Topologie versehen und das Ziel mit der Topologie $\mathcal{O}_{\|-\|}$ für *eine* Halbnorm aus $\mathcal{F}$ geben. Aber das folgt nun einfach aus dem Fall einer Halbnorm, da die Abbildungen ja mit der hiervon induzierten Topologie schon stetig sind und bezüglich einer feineren Topologie dann nur stetiger werden.

2. Für die Produkttopologie ist $\prod_{i \in I} \mathbb{R}$ ein topologischer Vektorraum. Denn um die Stetigkeit von Addition und Skalarmultiplikation zu prüfen, reicht es dies nach Projektion auf jede Koordinate zu prüfen. Aber etwa ist die Abbildung

$$\prod_{i \in I} \mathbb{R} \times \prod_{i \in I} \mathbb{R} \xrightarrow{+} \prod_{i \in I} \mathbb{R} \xrightarrow{\mathrm{pr}_j} \mathbb{R}$$

das gleiche wie

$$\prod_{i \in I} \mathbb{R} \times \prod_{i \in I} \mathbb{R} \xrightarrow{\mathrm{pr}_j \times \mathrm{pr}_j} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{+} \mathbb{R}$$

und hier wissen wir schon, dass die Bestandteile stetig sind; analog bei den anderen beiden Fällen. Und allgemein ist ein Unterraum W eines topologischen Vektorraums V mittels der Teilraumtopologie wieder ein topologischer Vektorraum: Wieder muss man die Stetigkeit von Addition und Skalarmultiplikation prüfen.

Aber nach dem Stetigkeitskriterium für die Teilraumtopologie reicht es im Falle der Addition zu prüfen, dass

$$W \times W \xrightarrow{+} W \xrightarrow{\text{incl}} V$$

stetig ist, aber die stimmt mit

$$W \times W \xrightarrow{\text{incl}\times\text{incl}} V \times V \xrightarrow{+} V$$

und hier wissen wir ja wieder, dass alles stetig ist.

Für die Boxtopologie ist die Addition auf $\prod_{i\in I} \mathbb{R}$ immer noch stetig: Ist etwa $V = \prod_{i\in I} U_i$, $U_i \subseteq \mathbb{R}$ offen, eine der definierenden Mengen der Boxtopologie und $x, y \in \prod_{i\in I} \mathbb{R}$ mit $x + y \in V$, so wähle $\epsilon_i > 0$ mit $]x_i + y_i - \epsilon_i, x_i + y_i + \epsilon_i[\subseteq U_i$, so liegt das boxoffene

$$\left(\prod_{i\in I}]x_i - \tfrac{\epsilon_i}{2}, x_i + \tfrac{\epsilon_i}{2}[\right) \times \left(\prod_{i\in I}]y_i - \tfrac{\epsilon_i}{2}, y_i + \tfrac{\epsilon_i}{2}[\right) \subseteq \prod_{i\in I} \mathbb{R} \times \prod_{i\in I} \mathbb{R}$$

komplett im Urbild von V unter der Addition. Dieses Urbild ist also eine Umgebung von (x, y) und damit die Addition stetig.

Aber die Skalarmultiplikation ist es nicht mehr, wenn I unendlich ist: Wählen wir dann nämlich eine Injektion $j : \mathbb{N} \to I$, so ist das Urbild von

$$W := \prod_{k\in\mathbb{N}}]-\tfrac{1}{k+1}, \tfrac{1}{k+1}[\times \prod_{i\in I\setminus \operatorname{im}(j)} \mathbb{R} \subseteq \prod_{i\in I} \mathbb{R}$$

nicht offen: Denn sicherlich liegt $(0, (1, 1, 1, \ldots)) \in \mathbb{R} \times \prod_{i\in I} \mathbb{R}$ im Urbild, aber für kein $\delta > 0$ tut $(\delta, (1, 1, 1, 1, \ldots))$ das, aber jede Umgebung von $(0, (1, 1, 1, \ldots))$ enthält natürlich ein Element dieser Form.

Für die direkte Summe sieht das aber wiederum anders aus: Ist $V = \prod_{i\in I} U_i \subseteq \prod_{i\in I} \mathbb{R}$ eine definierende boxoffene Menge, und $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times \bigoplus_{i\in I} \mathbb{R}$ mit $\lambda \cdot x \in V$, so wähle wieder $\epsilon_i > 0$ genau wie bei der Addition, und setze wir $\delta = \min_{i\in I, x_i \neq 0} \frac{\epsilon_i}{2|x_i|+2}$, was wegen der Endlichkeit des Trägers von x ein Minimum über eine endliche Menge und daher immer noch positiv ist (für $x = 0$ setze man $\delta = 1$. Die Rechnung aus dem ersten Teil der Aufgabe sagt nun, dass

$$]\lambda - \delta, \lambda + \delta[\times \prod_{i\in I}]x_i - \min\left(1, \tfrac{\epsilon}{2|\lambda|+1}\right), x_i + \min\left(1, \tfrac{\epsilon}{2|\lambda|+1}\right)[\subseteq \mathbb{R} \times \prod_{i\in I} \mathbb{R}$$

vollständig im Urbild von V liegt. Damit ist die Skalarmultiplikation auf $\bigoplus_{i\in I} \mathbb{R}$ stetig.

Aber mit der Produkttopologie stimmt die Boxtopologie auf $\bigoplus_{i\in I} \mathbb{R}$ immer noch nicht überein: Der Schnitt $W \cap \bigoplus_{i\in I} \mathbb{R}$ ist boxoffen (W von weiter oben), aber enthält für keine der basisoffenen Mengen $\prod_{i\in F} U_i \times \times \prod_{i\in I\setminus F} \mathbb{R}$, $F \subseteq I$ endlich, den Schnitt mit $\bigoplus_{i\in I} \mathbb{R}$: Für ein $i \in \operatorname{im}(j) \setminus F$ ist ja etwa der verdoppelte Einheitsvektor $2e_i$ im letzteren Schnitt, aber nicht im ersten.

□

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass eine topologische Gruppe G genau dann Hausdorff'sch ist, wenn $\{e\} \subseteq G$ abgeschlossen ist, wo $e \in G$ das neutrale Element ist.

Lösungsskizze. Es seien $x \neq y \in G$ gegeben, zu denen wir disjunkte Umgebungen bauen wollen. Betrachte dafür die Abbildung

$$G \times G \longrightarrow G, \quad (g, h) \mapsto gh^{-1},$$

welche genau nach den Axiomen einer topologischen Gruppe stetig ist. Da $\{e\} \subseteq G$ abgeschlossen ist, ist $G \setminus \{e\}$ offen und damit als dessen Urbild unter obiger Abbildung auch

$$F = \{(g, h) \in G \times G \mid g \neq h\}.$$

Es existiert also um $(x, y) \in F$ noch eine offene Menge in F, und diese wiederum muss um (x, y) herum noch eine der Basismengen $U \times V \subseteq G \times G$ der Produkttopologie (mit $U, V \subseteq G$ offen) enthalten, also

$$(x, y) \in U \times V \subseteq F.$$

Aber $U \times V \subseteq F$ ist äquivalent zu $U \cap V = \emptyset$, sodass wir fertig sind. $\square$