Aufgabe 1 (5 Punkte)

Finden Sie in $\mathrm{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ausgestattet mit der Topologie der punktweisen Konvergenz eine sequentiell abgeschlossene, aber nicht abgeschlossene Menge.

Anmerkung: Es ist also insbesondere die Sequentialisierung der Topologie der punktweisen Konvergenz eine zweite Topologie bezüglich derer eine Funktionenfolge genau dann konvergiert, wenn sie es punktweise tut.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Zeigen Sie:

1. Für jede Filtrierung $\mathcal{F}$, also
$$0 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}_{i-1} \subseteq \mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_{i+1} \subseteq \cdots \subseteq M,$$
einer abelschen Gruppe M macht die $\mathcal{F}$-adische Topologie M zu einer topologischen abelschen Gruppe.
2. Für ein Ideal $I \subseteq R$ macht die I-adische Topologie, also die durch die Filtrierung
$$\mathcal{F}_i = \begin{cases} I^{-i} & i \leq 0 \\ R & i \geq 0 \end{cases}$$
induzierte R zu einem kommutativen topologischen Ring.
3. $\mathbb{Q}$ ist mit der Topologie der Filtrierung
$$\mathcal{G}_i = \begin{cases} (-i)! \cdot \mathbb{Z} & i \leq 0 \\ \mathbb{Z} & i \geq 0 \end{cases}$$
ein topologischer Ring und ein Körper, aber kein topologischer Körper.

Anmerkung: Für jeden R-Modul M liefert die I-adische Topologie auf M, also die von
$$\mathcal{H}_i = \begin{cases} I^{-i} \cdot M & i \leq 0 \\ M & i \geq 0 \end{cases}$$
induzierte, auch einen topologischen Modul über R (ebenfalls ausgestattet mit der I-adischen Topologie).

Achtung:

Ich habe hier die Formulierung des dritten Teils korrigiert, mehr dazu in der Lösung.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

1. Zeigen Sie: Ist $\mathcal{F}$ eine Familie von Halbnormen auf einem reellen Vektorraum V, so macht die Topologie $\bigvee_{\|-\| \in \mathcal{F}} \mathcal{O}_{\|-\|}\, V$ zu einem topologischen $\mathbb{R}$-Vektorraum.
2. Wie sieht es bei der Produkt- und wie bei der Box-Topologie auf $\prod_{i \in I} \mathbb{R}$ für unendliches I aus? Wie bei dem Unterraum $\bigoplus_{i \in I} \mathbb{R}$? Stimmen die beiden Teilraumtopologien auf ihm überein?

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass eine topologische Gruppe G genau dann Hausdorff'sch ist, wenn $\{e\} \subseteq G$ abgeschlossen ist, wo $e \in G$ das neutrale Element ist.