

### Aufgabe 1 (5 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass ein topologischer Raum genau dann hausdorff'sch ist, wenn  $\Delta_X = \{(x, y) \in X^2 \mid x = y\} \subseteq X \times X$  abgeschlossen in der Produkttopologie ist.
2. Folgern Sie, dass für einen Hausdorffraum  $X$  und ein stetige Abbildungen  $f, g: Y \rightarrow X$  die Übereinstimmungsmenge  $\{y \in Y \mid f(y) = g(y)\}$  abgeschlossen in  $Y$  ist.

### Aufgabe 2 (5 Punkte)

Es sei  $G$  eine topologische Gruppe und  $H \subseteq G$  eine Untergruppe. Zeigen Sie:

1. Es ist auch der Abschluss  $\overline{H}$  eine Untergruppe von  $G$ .
2. Zeigen Sie, dass  $G/H$  genau dann hausdorff'sch ist, wenn  $H$  in  $G$  abgeschlossen ist.

Eine stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  heißt eine *Quotientenabbildung*, wenn  $f$  surjektiv ist und  $Y$  die von der Topologie auf  $X$  koinduzierte Topologie trägt oder äquivalent, wenn die induzierte Abbildung  $X/\sim \rightarrow Y$ , wo  $x \sim y$ , wenn  $f(x) = f(y)$ , ein Homöomorphismus ist.

### Aufgabe 3 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass die  $b$ -adische Entwicklung

$$e: \prod_{i \in \mathbb{N}_{\geq 1}} \{0, \dots, b\} \longrightarrow [0, 1], \quad f \longmapsto \sum_{k \geq 1} \frac{f_k}{(b+1)^k}$$

für jedes  $b \geq 1$  eine Quotientenabbildung ist; hier sei die Quelle mit der Produkttopologie der diskreten Topologien auf  $\{0, \dots, b\}$  ausgestattet.

### Aufgabe 4 (5 Punkte)

Es sei

$$X = ]0, 1] \times [-1, 0] \cup [0, 1] \times \{1\}$$

und  $(x, y) \sim (w, z)$  falls  $(x, y) = (w, z)$  oder  $x = w$  und  $\{y, z\} = \{0, 1\}$ . Dann gibt liefert

$$X \rightarrow [0, 1]^2, \quad (x, y) \rightarrow \begin{cases} (x, y+1) & y \leq 0 \\ (x, y) & y = 1 \end{cases}$$

eine stetige Injektion  $X/\sim \rightarrow [0, 1]^2$ . Ist sie ein Homöomorphismus auf ihr Bild  $]0, 1] \times [0, 1] \cup \{(0, 1)\}$ ?