Dem Hinweis in Aufgabe 1 folgend zeigen wir zunächst:

Lemma. *Sei $n \geq 0$ und $x \in S^n$. Dann ist die stereographische Projektion*

$$s : S^n \backslash \{x\} \longrightarrow x^\perp$$

ein Homöomorphismus.

Beweis. Für ein $y \in S^n \backslash \{x\}$ ist $s(y)$ der Schnittpunkt der Geraden $y + \lambda(x - y)$ mit $x^\perp$, also

$$\begin{aligned} 0 &= \langle y + \lambda(x-y), x\rangle = (1-\lambda)\langle y, x\rangle + \lambda \cdot 1 \\ \Leftrightarrow \lambda &= \frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, x\rangle - 1}. \end{aligned}$$

(Dabei ist wegen $y \neq x$ auch $\langle y, x\rangle < 1$.) Somit ist

$$s(y) = y + \frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, x\rangle - 1}(e_1 - y),$$

was stetig ist. (Dass die Abbildung $y \mapsto \langle y, x\rangle$ stetig ist, können wir bspw. anhand der expliziten Formel in den Standardkoordinaten erkennen.)

Umgekehrt sei $z \in x^\perp$. Dann hat die Gerade $z + \mu(x - z)$ zwei Schnittpunkte mit S^n, nämlich x bei $\mu = 1$, und das eindeutige $y \in S^n$ mit $z = s(y)$. Dafür ist

$$\begin{aligned} 1 &= \big|z + \mu(x-z)\big| = (1-\mu)^2|z|^2 + \mu^2|x|^2 \\ \Leftrightarrow 0 &= (\mu - 1)\big(\mu(|z|^2+1) - |z|^2 + 1\big), \end{aligned}$$

wobei wir für die Umformung benutzt haben, dass $z \perp x$ ist. Für die Lösung mit $\mu \neq 1$ muss dann $\mu = \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}$ sein. Es bezeichnet also

$$\begin{aligned} t : x^\perp &\longrightarrow S^n \backslash \{x\} \\ z &\longmapsto z + \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}(x - z) \end{aligned}$$

eine offensichtlich stetige Abbildung, die per Konstruktion gerade das Inverse zu s liefert (denn für $z \in x^\perp$ und $y \in S^n \backslash \{x\}$ ist $z = s(y)$ genau dann, wenn z, y und x auf einer Geraden liegen, genau dann ist auch $y = t(z)$). Wer möchte, kann das auch von Hand nachrechnen. Insbesondere ist also s ein Homöomorphismus. □

Aufgabe 1

Betrachte zunächst

$$\begin{aligned} g : D^n \backslash S^{n-1} = \{w \in \mathbb{R}^n : |w| < 1\} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ w &\longmapsto \frac{|w|}{1 - |w|} \cdot w \end{aligned}$$

Da $\lambda \mapsto \frac{\lambda}{1-\lambda}$ ein Homöomorphismus von $(0,1)$ nach $(0,\infty)$ ist (das Inverse ist gegeben durch $\lambda \mapsto \frac{\lambda}{1+\lambda}$, beide sind offensichtlich stetig), ist auch g ein Homöomorphismus mit Inversem $g^{-1}(y) = \frac{|y|}{1+|y|} \cdot y$. Zusammen mit unserem Lemma haben wir dann für ein fixes $x \in S^n$ einen Homöomorphismus $s^{-1} \circ g : D^n \backslash S^{n-1} \to S^n \backslash \{x\}$. Wir definieren nun

$$\begin{aligned} f : D^n &\longrightarrow S^n \\ w &\longmapsto \begin{cases} s^{-1} \circ g(w) & |w| < 1 \\ x & |w| = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Dann ist f stetig: Für $U \subseteq S^n$ offen ist $f^{-1}(U\backslash\{x\}) = g^{-1} \circ s(U\backslash\{x\})$ offen, wir müssen also nur noch Umgebungen von x betrachten. Sei dafür $\varepsilon > 0$ und $U = D(x,\varepsilon) \cap S^n$, solche Mengen bilden eine Umgebungsbasis von x in S^n. Dann ist

$$f^{-1}(U) = S^{n-1} \cup f^{-1}(U\backslash\{x\}),$$

wobei die zweite Komponente wie oben offen ist. Sei nun $\delta > 0$, dann ist für $1-\delta < |w| < 1$:

$$|g(w)| = \frac{|w|}{1-|w|} \cdot |w| > \frac{(1-\delta)^2}{\delta} \xrightarrow{\delta \to 0} \infty.$$

Weiter ist für $N > 0$ und $|y| > N$:

$$\begin{aligned}
\left|s^{-1}(y) - x\right| &= \left| y + \frac{|y|^2-1}{|y|^2+1}(x-y) - x \right| \\
&= \left| (y-x) \cdot \left(1 - \frac{|y|^2-1}{|y|^2+1} \right) \right| \\
&= \sqrt{|y|^2+1} \cdot \left| 1 - \frac{|y|^2-1}{|y|^2+1} \right| \\
&= \sqrt{|y|^2+1} \cdot \frac{\left|(|y|^2+1) - (|y|^2-1)\right|}{\left(\sqrt{|y|^2+1}\right)^2} \\
&= \frac{2}{\sqrt{|y|^2+1}} \xrightarrow{N \to \infty} 0
\end{aligned}$$

Es lässt sich also ein $N > 0$ finden, sodass $\left|s^{-1}(y) - x\right| < \varepsilon$ für $|y| > N$ ist, sowie ein $\delta > 0$, sodass für alle $w \in D^n$ mit $1-\delta < |w| < 1$ auch $|g(w)| > N$ und somit $\left|s^{-1}(g(w)) - x\right| < \varepsilon$ ist, also $f(w) \in U$. Damit ist für jedes $w' \in S^{n-1} \subset f^{-1}U$ auch die Umgebung $D(w',\delta) \cap D^n$ im Urbild enthalten, also ist f stetig.

Da $f(w') = x$ für alle $w' \in S^n$ gilt, gibt es mit der universellen Eigenschaft der Quotiententopologie dann eine eindeutige stetige Abbildung $\bar{f} : D^n/S^{n-1} \to S^n$. Diese ist bijektiv: f ist bereits surjektiv, die Einschränkung von f auf $D^n\backslash S^{n-1}$ ist injektiv mit Bild $S^n\backslash\{x\}$, und auf $D^n\backslash S^{n-1}$ wird kein Punkt durch die Äquivalenzrelation identifiziert. Dahingegen ist $f(S^{n-1}) = \{x\}$, und die Äquivalenzrelation identifiziert gerade alle Punkte in S^{n-1}, also ist auch $\bar{f}$ injektiv.

Es ist aber D^n kompakt, weil abgeschlossen und beschränkt, somit auch D^n/S^{n-1} als Bild einer kompakten Menge, und S^n ist hausdorff'sch: Damit ist unsere stetige Bijektion schon ein Homöomorphismus.

Aufgabe 2

Die Abbildung

$$\begin{aligned}
\iota : K^n &\longrightarrow K^{n+1}\backslash\{0\} = K^n \times K\backslash\{(0,0)\} \\
x &\longmapsto (x,1)
\end{aligned}$$

ist stetig, somit auch die Komposition mit der Projektion

$$\begin{aligned}
\mathrm{pr} : K^{n+1}\backslash\{0\} &\longrightarrow \mathbb{P}(K^{n+1}) \\
y &\longmapsto \langle y \rangle.
\end{aligned}$$

Es genügt also, wenn wir zeigen, dass $\mathrm{pr} \circ \iota$ injektiv und offen ist. Für die Injektivität bemerken wir, dass für $x, x' \in K^n$ gilt:

$$\mathrm{pr} \circ \iota(x) = \mathrm{pr} \circ \iota(x') \Longleftrightarrow \langle x,1 \rangle = \langle x',1 \rangle \Longleftrightarrow \exists \lambda \neq 0 : \lambda \cdot (x,1) = (x',1)$$

Dann müsste aber $\lambda = 1$ sein, also $x = x'$.

Für die Offenheit sei $U \subseteq K^n$ offen. Dann ist nach Definition der Quotiententopologie $\mathrm{pr} \circ \iota(U) \subseteq \mathbb{P}(K^{n+1})$ offen genau dann, wenn $\mathrm{pr}^{-1}(\mathrm{pr} \circ \iota(U)) \subseteq K^{n+1} \backslash \{0\}$ offen ist. Es ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{pr}^{-1}(\mathrm{pr} \circ \iota(U)) \subseteq K^{n+1} \backslash \{0\} &= \left\{ y \in K^{n+1} \backslash \{0\} : \exists \lambda \neq 0 : \lambda y \in \iota(U) \right\} \\
&= \left\{ y \in K^{n+1} : \exists \lambda \neq 0, x \in U : \lambda y = (x, 1) \right\} \\
&= \left\{ y \in K^{n+1} : y_{n+1} \neq 0, \left(\frac{y_1}{y_{n+1}}, \ldots, \frac{y_n}{y_{n+1}} \right) \in U \right\}
\end{aligned}$$

Aber

$$\begin{aligned}
f : \{ y \in K^{n+1} : y_{n+1} \neq 0 \} &\longrightarrow K^n \\
y &\longmapsto \left(\frac{y_1}{y_{n+1}}, \ldots, \frac{y_n}{y_{n+1}} \right)
\end{aligned}$$

ist stetig, dann ist auch $\mathrm{pr}^{-1}(\mathrm{pr} \circ \iota(U)) = f^{-1}(U)$ als Urbild offener Menge offen in $\{ y \in K^{n+1} : y_{n+1} \neq 0 \}$. Da auch $\{ y \in K^{n+1} : y_{n+1} \neq 0 \} \subseteq K^{n+1} \backslash \{0\}$ offen ist, ist unsere Menge also offen in $K^{n+1} \backslash \{0\}$.

Als nächstes betrachten wir das Komplement des Bildes: Das sind gerade jede $\langle y \rangle$, sodass es kein $\lambda \neq 0$ gibt mit $\lambda y = (x, 1)$. Das ist genau dann der Fall, wenn $y_{n+1} = 0$ ist. Aber für den Homöomorphismus

$$\begin{aligned}
\varphi : K^n \backslash \{0\} &\longrightarrow \left\{ y \in K^{n+1} \backslash \{0\} : y_{n+1} = 0 \right\} \\
x &\longmapsto (x, 0)
\end{aligned}$$

ist $\lambda x = x'$ genau dann, wenn $\lambda \varphi x = \varphi x'$ ist, also induziert φ einen Homöomorphismus

$$\bar{\varphi} : \mathbb{P}(K^n) = K^n \backslash \{0\} / x \sim \lambda x \longrightarrow \left\{ y \in K^{n+1} \backslash \{0\} : y_{n+1} = 0 \right\} / y \sim \lambda y.$$

auf den Quotienten der entsprechenden Äquivalenzrelationen. Zuletzt bemerken wir folgendes:

Lemma. *Sei X ein topologischer Raum mit Äquivalenzrelation $\sim$ und $A \subseteq X$ ein saturierter Unterraum, d.h. für alle $x \in A$, $x \sim y$ ist $y \in A$. Falls die Projektion $\mathrm{pr}_X : X \to X/\sim$ offen ist, induziert die Inklusion $j : A \to X$ einen Homöomorphismus zwischen $A/\sim$ und $\{[a] \in X/\sim : a \in A\}$.*

Beweis. Die Verkettung $\mathrm{pr}_X \circ j : A \to X/\sim$ ist stetig und identifiziert äquivalente Punkte, also induziert sie eine stetige Abbildung $j/\sim : A/\sim \to X/\sim$. Diese ist injektiv, da $j/\sim([x]) = j/\sim([x'])$ genau dann ist, wenn $x \sim x'$, also $[x] = [x']$ in $A/\sim$.

Es bleibt also nur zu zeigen, dass die auf das Bild koeingeschränkte Abbildung offen ist: Sei dafür $U \subseteq A/\sim$ offen. Dann ist $\mathrm{pr}_A^{-1}(U) \subseteq A$ offen, also existiert ein offenes $V \subseteq X$ mit $V \cap A = \mathrm{pr}_A^{-1}(U)$. Per Annahme ist dann $\mathrm{pr}_X(V) \subseteq X/\sim$ offen, also auch $\mathrm{pr}_X^{-1}(\mathrm{pr}_X(V)) \subseteq X$. Für $a \in \mathrm{pr}_X^{-1}(\mathrm{pr}_X(V)) \cap A$ ist dann $[a] \in \mathrm{pr}_X(V)$, also $a \sim x$ für ein $x \in V$. Da A saturiert ist, muss dann auch $x \in A$ sein, und somit $x \in V \cap A = \mathrm{pr}_A^{-1}(U)$. Aber dann liegt auch a schon in $\mathrm{pr}_A^{-1}(U)$, also ist

$$\mathrm{pr}_X^{-1}(\mathrm{pr}_X(V)) \cap A = \mathrm{pr}_A^{-1}(U).$$

(Die Inklusion $\supseteq$ folgt direkt aus der Wahl von V). Damit ist auch

$$\mathrm{pr}_X(V) \cap \{[a] \in X/\sim : a \in A\} = j/\sim(U),$$

da die Urbilder unter pr_X übereinstimmen, und somit ist $j/\sim(U)$ offen im Bild $\{[a] \in X/\sim : a \in A\}$ von $j/\sim$. □

Bemerkung. Sowohl die Bedingung, dass A saturiert unter der Äquivalenzrelation ist, als auch jene, dass die Projektion offen ist, sind notwendig. Es ist eine nette kleine Übungsaufgabe, Gegenbeispiele zu finden, wenn diese Bedingungen jeweils nicht erfüllt sind!

In unserer Situation gibt uns das gerade einen Homöomorphismus

$$\left\{ y \in K^{n+1} \backslash \{0\} : y_{n+1} = 0 \right\} / y \sim \lambda y \longrightarrow \left\{ \langle y \rangle \in \mathbb{P}^{n+1}(K) : y_{n+1} = 0 \right\},$$

und komponiert mit $\bar{\varphi}$ die gesuchte Identifikation des Komplements.

Zu guter Letzt betrachten wir nun $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$: Aus Aufgabe 1 und den obigen Überlegungen erhalten wir einen Homöomorphismus

$$h : D^2 \backslash S^1 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C} \xrightarrow{\mathrm{pr} \circ \iota} \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \backslash \{\langle 1, 0 \rangle\}.$$

Diesen wollen wir, ähnlich zu Aufgabe 1, erweitern zu

$$\begin{aligned} \hat{h} : D^2 &\longrightarrow \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \\ w &\longmapsto \begin{cases} h(w) & |w| < 1 \\ \langle (1,0) \rangle & |w| = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Das ist stetig: Wieder müssen wir nur eine offene Umgebung $\langle x, 0 \rangle \in U \subseteq \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ betrachten. Für $|w| < 1$ und $\hat{h}(w) = h(w) \in U$ ist mit Stetigkeit von h auch eine Umgebung von w im Urbild von $U \backslash \{\langle (1,0) \rangle\}$ und somit von U enthalten. Sei also $|w| = 1$. Es ist $\hat{h}(w) = \langle (1,0) \rangle = \langle (w, 0) \rangle$. Somit ist $\mathrm{pr}^{-1}(U) \subseteq \mathbb{C}^2 \backslash \{0\}$ eine offene Umgebung von $(w, 0)$, es existiert also ein $\varepsilon > 0$ mit $D((w,0), \varepsilon) \subset \mathrm{pr}^{-1}(U)$.

Setze nun $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Dann ist für $|w'| < 1$ mit $|w - w'| < \delta$:

$$\hat{h}(w') = h(w') = \langle g(w'), 1 \rangle = \left\langle \left(\frac{|w'|}{1 - |w'|} \cdot w', 1 \right) \right\rangle = \left\langle \left(w', \frac{1 - |w'|}{|w'|} \cdot 1 \right) \right\rangle,$$

Wobei wir die Identifizierung $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ implizit lassen. Aber es ist

$$\left\| (w, 0) - \left(w', \frac{1 - |w'|}{|w'|} \right) \right\| = \sqrt{\underbrace{|w - w'|^2}_{< \delta^2} + \underbrace{\left(\frac{1 - |w'|}{|w'|} \right)^2}_{< \frac{\delta^2}{(1-\delta)^2} < 3\delta^2}} < 2\delta = \varepsilon,$$

wobei wir benutzt haben, dass für δ ausreichend klein $1 - \delta > \frac{1}{3}$ ist.

Damit ist aber

$$\left(w', \frac{1 - |w'|}{|w'|} \right) \in D((w, 0), \varepsilon) \subset \mathrm{pr}^{-1}(U),$$

und somit

$$\hat{h}(w') = \left\langle \left(w', \frac{1 - |w'|}{|w'|} \right) \right\rangle \in U.$$

Also induziert $\hat{h}$ wieder eine stetige Abbildung $D^2/S^1 \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ auf dem Quotienten. Diese ist offensichtlich bijektiv, und wieder als Abbildung von einen kompakten Raum in einen hausdorff'schen somit schon ein Homöomorphismus. Verkettet mit dem Homöomorphismus aus Aufgabe 1 erhalten wir dann den gewünschten Homöomorphismus $S^2 \cong \mathbb{C}\mathrm{P}^1$.

Aufgabe 3

Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $A \in \mathrm{GL}_n(K)$. Wir konstruieren Wege in $\mathrm{GL}_n(K)$ von A zu zunehmend einfacheren Matrizen. Als erstes finden wir einen solchen Weg von A zu einer Matrix, in der alle Spalten von der Form $\varepsilon_i \cdot e_i$ für $|\varepsilon_i| = 1$ sind (dabei ist die Reihenfolge der Spalten egal). Wir bezeichnen dafür mit $F_k \subseteq \mathrm{GL}_n(K)$ die Menge aller invertierbaren Matrizen, für die mindestens k Spalten von dieser Form sind. Dann ist

$$\mathrm{GL}_n(K) = F_0 \supset \cdots \supset F_n.$$

Nun wollen wir induktiv für ein $A \in F_k$, $k < n$ einen Pfad zu einem $A'' \in F_{k+1}$ finden: Es gibt also für $1 \leq l \leq k$ Indizes i_l, j_l und ε_l derart, dass die i_l sowie die j_l paarweise verschieden sind, $|\varepsilon_l| = 1$, und $A_{-, j_l} = \varepsilon_l \cdot e_{i_l}$. Sei nun $j \neq j_l$ für alle l. Dann existiert, da A invertierbar ist, ein $i \neq i_l$ für alle l derart, dass $A_{i,j} \neq 0$. Für $i' \neq i$ bezeichnen wir für beliebiges λ mit $s^{\lambda}_{i,i'}(A)$ die Matrix, in der wir das λ-Fache der i-ten Zeile von A auf die i'-te Zeile addieren: Wie in der Gauß-Elimination können wir nun durch Zeilenoperationen dieser Form alle anderen Einträge in $A_{-,j}$ eliminieren, ohne die Spalten A_{-, j_l} zu verändern.

Dabei ist aber für jedes λ mit A auch $s_{i,i'}^{\lambda}(A)$ invertierbar (bspw. als Produkt invertierbarer Matrizen), insbesondere gibt uns dann

$$\begin{aligned} [0,1] &\longrightarrow \mathrm{GL}_n(K) \\ t &\longmapsto s_{i,i'}^{t\cdot\lambda}(A) \end{aligned}$$

einen stetigen Weg von A zu $s_{i,i'}^{t\cdot\lambda}(A)$ in $\mathrm{GL}_n(K)$: Induktiv erhalten wir also einen Pfad von A zu einer Matrix A', in der die Spalten mit Index j_l unverändert bleiben, und die Spalte mit Index j noch genau einen nichttrivialen Eintrag in Zeile i hat. Wir bezeichnen nun für ein $\lambda \neq 0$ mit $m_i^{\lambda}(A')$ die Matrix, die wir aus A' erhalten, indem wir die i-te Zeile mit λ multiplizieren. Dann ist mit λ und A' auch $m_i^{\lambda}(A')$ invertierbar, und für $\lambda = \frac{1}{|A_{i,j}|}$ ist dann gerade garantiert, dass $A'' = m_i^{\lambda}(A') \in F_{k+1}$ liegt. Durch

$$\begin{aligned} [0,1] &\longrightarrow \mathrm{GL}_n(K) \\ t &\longmapsto m_{i,i'}^{t\cdot\frac{1}{|A_{i,j}|}+(1-t)}(A) \end{aligned}$$

erhalten wir dann einen Pfad von A' nach A'', und da $t \cdot \frac{1}{|A_{i,j}|} + (1-t) > 0$ ist, liegt dieser in $\mathrm{GL}_n(K)$. Insgesamt erhalten wir also wie gewollt einen Pfad von A nach $A'' \in F_{k+1}$.

Als nächstes konstruieren wir einen Pfad von $A \in F_n$ zu einer Diagonalmatrix

$$D(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \varepsilon_n \end{pmatrix},$$

wobei $|\varepsilon_i| = 1$ für alle i gilt: Dafür wollen wir induktiv Zeilen vertauschen, allerdings müssen wir ein Vorzeichen einführen, um wieder einen Pfad zu erhalten. Es existiert also eine Permutation $\sigma : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$ mit $A_{-,j} = \varepsilon_j \cdot e_{\sigma(j)}$ für alle $1 \le j \le n$. Falls $\sigma = \mathrm{id}$, ist A bereits diagonal. Ansonsten setzen wir $j_0 = \min\{j : \sigma(j) \neq j\}$ und $j_1 = \sigma^{-1}(j_0)$. Betrachte für $t \in [0,1]$ die Matrix $B(t)$ mit

$$\begin{aligned} B(t)_{j_0,j_0} &= \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\cdot\varepsilon_{j_0} \\ B(t)_{j_1,j_0} &= -\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\cdot\varepsilon_{j_1} \\ B(t)_{j_0,\sigma(j_0)} &= \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\cdot\varepsilon_{j_0} \\ B(t)_{j_1,\sigma(j_0)} &= \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\cdot\varepsilon_{j_1} \\ B(t)_{i,j} &= A_{i,j} \text{ überall sonst} \end{aligned}$$

Dann ist $B(0) = A$, $B(1)$ ist weiterhin in F_n, aber hat nun einen weiteren Diagonaleintrag bei j_0, und für alle t ist $B(t)$ invertierbar: Mit der Leibnizformel ist die Determinante

$$\det(B(t)) = \prod_{j\neq j_0,j_1} \varepsilon_j \cdot \underbrace{\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)}_{1} \cdot \varepsilon_{j_0}\varepsilon_{j_1}$$

als Produkt invertierbarer Zahlen wieder invertierbar. Damit ist $t \mapsto B(t)$ wieder ein stetiger Pfad in GL_n, und iteriert erhalten wir einen Pfad von A zu der gewünschten Diagonalmatrix.

Für den letzten Schritt müssen wir zwischen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ unterscheiden:

- Für $K = \mathbb{C}$ ist ein ε_i mit $|\varepsilon_i| = 1$ von der Form $\varepsilon_i = \exp(\varphi_i)$, und die Abbildung

  $$\begin{aligned} [0,1] &\longrightarrow \mathrm{GL}_n(K) \\ t &\longmapsto D(\exp((1-t)\cdot\varphi_1),\dots,\exp((1-t)\cdot\varphi_n)) \end{aligned}$$

  ist ein stetiger Pfad von $D(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ zur Identitätsmatrix: Zusammengenommen haben wir also für alle $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ einen stetigen Pfad zur Identitätsmatrix gefunden, also ist $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ wegzusammenhängend und somit insbesondere zusammenhängend.

- Für $K=\mathbb{R}$ ist $|\varepsilon_i|=1$ genau dann, wenn $\varepsilon_i=\pm 1$ ist. Falls nun ein $i>1$ existiert mit $\varepsilon_i=-1$, betrachten wir für $t\in[0,1]$ die Matrix $C(t)$ mit

$$\begin{aligned}
C(t)_{1,1} &= \cos(\pi\cdot t)\cdot\varepsilon_1\\
C(t)_{1,i} &= \sin(\pi\cdot t)\\
C(t)_{i,1} &= \sin(\pi\cdot t)\cdot\varepsilon_1\\
C(t)_{i,i} &= -\cos(\pi\cdot t)\\
C(t)_{i,j} &= D(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)_{i,j} \text{ überall sonst}
\end{aligned}$$

  Dann ist $C(0)=D(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ und $C(1)=D(-\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{i-1},1,\varepsilon_{i+1},\ldots,\varepsilon_n)$, außerdem ist wieder $C(t)$ invertierbar für alle t: Iteriert erhalten wir so einen stetigen Pfad von $D(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ zu entweder $D(-1,1,\ldots,1)$ oder $D(1,\ldots,1)=\mathbb{1}$, also erhalten wir einen solchen Pfad auch für beliebige $A\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Wir haben also in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ höchstens zwei Wegzusammenhangskomponenten und somit auch höchstens zwei Zusammenhangskomponenten.

  Nun müssen wir nur noch erkennen, dass diese $D(-1,1,\ldots,1)$ und $\mathbb{1}$ tatsächlich in verschiedenen Zusammenhangskomponenten liegen. Dafür betrachten wir die Determinante: Auf $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ eingeschränkt gibt diese eine stetige Abbildung $\det:\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\longrightarrow\mathbb{R}\backslash\{0\}$. (Die Stetigkeit können wir bspw. an der Leibnizformel erkennen.) Es ist aber $\mathbb{R}\backslash\{0\}=\mathbb{R}_{<0}\sqcup\mathbb{R}_{>0}$ eine disjunkte Vereinigung von zwei offenen Mengen, und somit auch $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})=\det^{-1}(\mathbb{R}_{<0})\sqcup\det^{-1}(\mathbb{R}_{>0})$. Mit $\det(D(-1,1,\ldots,1))=-1$ und $\det(\mathbb{1})=1$ liegen unsere beiden Matrizen auch gerade in den verschiedenen Zusammenhangskomponenten, es gibt also tatsächlich genau zwei Zusammenhangskomponenten.

Als letztes betrachten wir die Grassmann'schen: Aus Korollar 3.31 im Skript wissen wir insbesondere, dass es eine stetige Surjektion $\mathrm{GL}_n(K)\to\mathrm{Gr}_k(K^n)$ gibt, die eine Matrix A auf den von ihren ersten k Spaltenvektoren aufgespannten Unterraum schickt. Für $K=\mathbb{C}$ sind wir dann schon fertig: Dann ist $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ als Bild eines zusammenhängenden Raums wieder zusammenhängend. Für $K=\mathbb{R}$ müssen wir noch beobachten, dass es reicht, wenn wir uns auf Matrizen mit positiver Determinante beschränken: Für $\det(A)<0$ und $k>0$ können wir die erste Spalte x_1 durch $-x_1$ ersetzen, dadurch wird die Determinante positiv, aber in der Grassmann'schen ist $\langle -x_1,x_2\ldots,x_k\rangle=\langle x_1,x_2\ldots,x_k\rangle$. Für $k=0$ wird ohnehin jede Matrix auf $\langle 0\rangle$ geschickt. Es ist also die Einschränkung der Surjektion $\mathrm{GL}_n(R)\to\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ auf $\det^{-1}(\mathbb{R}_{>0})\subseteq\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ weiterhin eine Surjektion, nud somit ist auch die reelle Grassmann'sche zusammenhängend.

Aufgabe 4

Wir wählen eine der Charakterisierungen von Zusammenhang aus Satz 6.2 im Skript: Ein topologischer Raum Z ist zusammenhängend genau dann, wenn jede stetige Abbildung $f:Z\to\{0,1\}$ konstant ist.

Seien also X und Y zusammenhängend und $f:X\times Y\to\{0,1\}$ stetig. Falls $X=\emptyset$ oder $Y=\emptyset$ ist, ist auch $X\times Y=\emptyset$ und somit zusammenhängend. Andernfalls können wir ein $x_0\in Y$ und $y_0\in Y$ wählen. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned}
(-,y_0): X &\longrightarrow X\times Y\\
x &\longmapsto (x,y_0)
\end{aligned}$$

stetig (bspw., weil die Projektionen auf beide Faktoren stetig sind). Weil X zusammenhängend ist, muss dann die stetige Komposition $f\circ(-,y_0):X\to\{0,1\}$ konstant sein.

Genauso ist für beliebiges $x\in X$

$$\begin{aligned}
(x,-): Y &\longrightarrow X\times Y\\
y &\longmapsto (x,y)
\end{aligned}$$

stetig und somit die stetige Komposition $f\circ(x,-):Y\to\{0,1\}$ konstant.

Dann ist für $(x,y)\in X\times Y$ beliebig

$$f(x,y)=f\circ(x,-)(y)=f\circ(x,-)(y_0)=f(x,y_0)=f\circ(-,y_0)(x)=f\circ(-,y_0)(x_0)=f(x_0,y_0),$$

also ist auch f konstant.