Für $A \subseteq X$ setze $X/A := X/\sim$ wo $x \sim y$ genau dann, wenn $x = y$ oder $x, y \in A$.

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Konstruieren Sie einen Homöomorphismus $\mathrm{D}^n/\mathrm{S}^{n-1} \to \mathrm{S}^n$, wo

$$\mathrm{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\} \quad \text{und} \quad \mathrm{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}.$$

Hinweis: Sowohl für diese als auch die nächste Aufgabe lohnt es sich erst zu zeigen, dass für jeden Punkt $x \in \mathrm{S}^n$, die *stereographische Projektion* $\mathrm{S}^n \setminus \{x\} \to x^\perp$, die ein $x \neq y \in \mathrm{S}^n$ auf den Schnittpunkt der Graden durch x und y mit dem orthogonalen Komplement $x^\perp$ schickt, ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Es sei K ein hausdorff'scher topologischer Körper. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$K^n \longrightarrow \mathbb{P}(K^{n+1}), \quad (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \langle (x_1, \ldots, x_n, 1) \rangle$$

ein Homöomorphismus auf ihr Bild ist und Komplement des Bildes homöomorph zu $\mathbb{P}(K^n)$.

Folgern Sie, dass $\mathbb{CP}^1$ homöomorph zu S^2 ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass für $n \geq 1$ hat $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ zwei Zusammenhangskomponenten und $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ nur eine. Folgern Sie, dass sowohl die reellen als auch komplexen Grassmann'schen zusammenhängen.

Hinweis: Entfernt man die Zeilen/Spaltetäusche aus dem Gaußverfahren liefert dies einen Weg von einer gegebenen invertieren Matrix zu einer, die in jeder Spalte und Zeile nur einen Eintrag außer 0 hat und dieser ist ± 1 (wie?). Dann überlege man etwa noch, dass sich

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

jeweils durch einen Weg verbinden lassen.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Produkt zweier zusammenhängender topologischer Räume wieder zusammenhängt.