Aufgabe 1 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass ein erstabzählbarer überdeckungskompakter topologischer Raum auch folgenkompakt ist.

Lösungsvorschlag. Ist nämlich $f\colon \mathbb{N} \to X$ eine Folge und X erstabzählbar und nehmen wir einmal an f hätte keine konvergente Teilfolge. Ist dann $x \in X$ beliebig, so wähle eine abzählbare Umgebungsbasis $U_i, i \in \mathbb{N}$ von x. Damit keine Teilfolge von f gegen x konvergiert, muss es dann ein U_i geben, für welches $f(n) \in U_i$ für nur endlich viele $n \in \mathbb{N}$: Sonst könnten wir ja induktiv $k_0 =$ setzen und für jedes $i > 0$ ein $k_i \in \mathbb{N}$ wählen mit $k_i > k_{i-1}$ und $f(k_i) \in U_i$ und die Teilfolge $f \circ k$ von f würde dann gegen x konvergieren.

Wählen wir nun für jedes $x \in X$ eine solche Umgebung U_x die nur endlich viele Folgenglieder enthält, so bilde die Inneren der U_x eine offene Überdeckung von X, die keine endliche Teilüberdeckung haben kann: Da jedes U_x nur endlich viele Folgenglieder enthält, würde dann ganz X nur endlich viele Folgenglieder enthalten, was natürlich absurd ist. □

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass jeder kompakte Hausdorffraum automatisch T4 ist, also dass je zwei abgeschlossenen disjunkten Teilmengen immer noch disjunkte Umgebungen haben.

Lösungsvorschlag. Seien also A und B abgeschlossen und disjunkt in X kompakt Hausdorff. Wir behandeln erst den Fall $A = \{a\}$ für ein $a \in X$, das macht für mich den Beweis etwas transparenter. Wir können dann nämlich zu jedem $b \in B$ per Annahme offene und disjunkte $a \in U_b \subseteq X$ und $b \in V_b \subseteq X$.

Aber weil B als abgeschlossene Teilmenge von X selbst wieder kompakt ist, gibt es dann endlich viele $b_1, \dots, b_n$ mit $B \subseteq U_{b_1} \cup \dots \cup U_{b_n}$, dessen recht Seite wir also W_a definieren. Aber W_a ist dann sicherlich disjunke von $Z_a\colon V_{b_1} \cap \dots \cap V_{b_n}$, was immer noch eine Umgebung von a ist. Damit haben wir disjunkte Umgebungen von a und B gefunden. Es ist also X schonmal T3. Um auch die T4 Eigenschaft zu erhalten, wiederholen wir das Argument jetzt einfach für allgemeines A: Für $a \in A$ haben wir dann gerade ja disjunkte offene Mengen $a \in Z_a \subseteq X$ und $B \subseteq W_a \subseteq X$ gefunden. Und weil auch A kompakt ist, muss es dann endlich viele $a_1, \dots, a_m \in A$ geben mit $A \subseteq V_{a_1} \cup \dots \cup A_{a_m}$ und diese offene Menge ist dann disjunkt von der offenen Menge $Z_{a_1} \cap \dots \cap Z_{a_1}$, die immer noch B enthält. □

Ziel der dritten Aufgabe ist es den Hamilton'schen Homöomorphismus $\mathbb{RP}^3 \longrightarrow \mathrm{SO}(3)$ zu konstruieren.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass für die Vorschrift

$$(z, w) \cdot (x, y) := (zx - w\overline{y}, zy + w\overline{x})$$

auf $\mathbb{C}^2$ die Gleichung $|(z,w)\cdot(x,y)| = |(z,w)| \cdot |(x,y)|$ für alle $x, y, z, w \in \mathbb{C}$ erfüllt und $\mathbb{C}^2$ zusammen mit der komponentenweisen Addition zu einem Schiefkörper $\mathbb{H}$, den *Quaternionen*, mit Einselement $(1,0)$ macht.

2. Der reelle Untervektorraum

$$\mathrm{Im}(\mathbb{H}) = \{x \in \mathbb{H} \mid x^2 \in \mathbb{R}_{\leq 0}\}$$

von $\mathbb{H}$ wir von $i := (i, 0)$, $j := (0, 1)$ und $k := (0, i)$ erzeugt.

3. Die Abbildung

$$\mathbb{H} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathrm{SO}(\mathrm{Im}(\mathbb{H})), \quad q \longmapsto [v \mapsto qvq^{-1}]$$

liefert den gesuchten Homöomorphismus.

Hinweis: Für die Surjektivität in (3) haben Sie hoffentlich in der linearen Algebra gezeigt, dass jedes Element aus SO(3) eine Rotation um eine Achse $u \in S^2$ mit einem Winkel $\varphi \in \mathbb{R}$ ist. Diese entspricht dem Quaternion $\cos(\frac{\varphi}{2}) \cdot 1 + \sin(\frac{\varphi}{2}) \cdot (u_1 i + u_2 j + u_3 k)$.

Proof. 1. Hier folgt alles durch simples Nachrechnen: Dass diese Multiplikation das Distributivgesetz erfüllt, folgt sofort aus ihrer (hoffentlich offensichtlichen) $\mathbb{R}$-Bilinearität. Für die Assoziativität rechnet man:

$$(a,b)\cdot[(z,w)\cdot(x,y)] = (a,b)\cdot(zx-w\overline{y}, zy+w\overline{x}) = (azx-aw\overline{y}-b\overline{z}\overline{y}-b\overline{w}x,\ azy+aw\overline{x}+b\overline{z}\overline{x}-b\overline{w}y),$$

$$[(a,b)\cdot(z,w)]\cdot(x,y) = (az-b\overline{w}, aw+b\overline{z})\cdot(x,y) = (azx-aw\overline{y}-b\overline{z}\overline{y}-b\overline{w}x,\ azy+aw\overline{x}+b\overline{z}\overline{x}-b\overline{w}y)$$

für die Neutralität

$$(1,0)\cdot(x,y) = (x-0, y+0) = (x,y) \quad \text{und} \quad (x,y)\cdot(1,0) = (x-0,y+0) = (x,y)$$

und für die Betragsgleichung haben wir

$$\begin{aligned}
|(z,w)\cdot(x,y)|^2 &= |(zx-w\overline{y}, zy+w\overline{x})| \\
&= |zx-w\overline{y}|^2 + |zy+w\overline{x}|^2 = (zx-w\overline{y})(\overline{zx}-\overline{w}y) + (zy+w\overline{x})(\overline{zy}+\overline{w}x) \\
&= |z|^2|x|^2 + |w|^2|y|^2 - zx\overline{w}y - w\overline{yzx} + |z|^2|y|^2 + |w|^2|x|^2 + zy\overline{w}x + w\overline{xzy} \\
&= |z|^2|x|^2 + |w|^2|y|^2 + |z|^2|y|^2 + |w|^2|x|^2
\end{aligned}$$

und

$$|(z,w)|^2\cdot|(x,y)|^2 = (|z|^2+|w|^2)(|x|^2+|y|^2) = |z|^2|x|^2+|w|^2|y|^2+|z|^2|y|^2+|w|^2|x|^2$$

Und $\mathbb{H}$ ist auch wirklich nicht kommutativ: $(0,1)\cdot(i,0) = (0,-i)$ und $(i,0)\cdot(0,1) = (0,i)$.

Uff.

Nun folgt dass $\mathbb{H}$ wirklich ein Schiefkörper ist, weil die offenbar $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $(x,y)\cdot - : \mathbb{H}\to\mathbb{H}$ für $(x,y)\neq 0$ wegen der Betragsrechnung Kern 0 hat. Sie ist also injektiv und weil $\mathbb{H}$ Dimension 4 hat, ist sie auch surjektiv, sodass es ein (z,w) gibt, mit $(x,y)\cdot(z,w) = (1,0)$, mit anderen Worten (x,y) ist eine Einheit; das Inverse hängt stetig von (x,y) ab, weil die Abbildung die (x,y) die Multiplikation mit (x,y) zuordnet offenbar eine stetige Abbildung $\mathbb{H}\setminus\{0\}\to GL_4(\mathbb{R})$ definiert, hinter die wir noch Inversion und Auswerten bei $(1,0)$ nachschalten, auch beides stetig.

2. Schauen wir einmal die Definition genauer an: Für $(x,y)\in\mathbb{H}$ haben wir

$$(x,y)^2 = (x^2-y\overline{y}, xy+y\overline{x}) = (x^2-|y|^2, 2y\,\mathrm{Re}(x))$$

Dass dies ein negatives Vielfaches vom Einselement $(1,0)$ ist, bedeutet sicherlich $y\,\mathrm{Re}(x)=0$. Wenn $y\neq 0$ ist, folgt sicherlich $\mathrm{Re}(x)=0$. Und im Falle $y=0$, dann steht hier natürlich einfach $(x^2,0)$, und dass x^2 eine negative reelle Zahl ist, sagt genau $x=\lambda i$, also auch $\mathrm{Re}(x)=0$. Insgesamt sehen wir also, dass der betrachtete Unterraum genau

$$\{(x,y)\in\mathbb{C}^2 \mid \mathrm{Re}(x)=0\}$$

ist und dieser wird offenbar von den drei angegebenen Elementen aufgespannt.

3. Die angegebene Abbildung ist offenbar stetig, wegen $|qvq^{-1}| = |q|\cdot|v|\cdot|q|^{-1} = |v|$ ist sie orthogonal und ausgewertet beim Einselement liefert sie die Identität, weil $\mathbb{H}\setminus\{0\}$ zusammenhängt, müssen ihre Werte alle positive Determinante haben. Und offenbar gilt $q1q^{-1}=1$, sodass sich diese Abbildung auf das orthogonale Komplement von 1 einschränkt. Kurzum die Abbildung ist wohldefiniert. Und offenbar schickt sie λq und q auf das gleiche Element für jedes $\lambda\in\mathbb{R}$. Faktorisiert also über eine Abbildung $\mathbb{RP}^3\to SO(3)$.

Diese ist injektiv: Dass $qvq^{-1}=v$ für ein $v\in\mathrm{Im}(\mathbb{H})$ gilt, sagt genau $qv=vq$. Schreiben wir dann $q=\lambda\cdot 1+q'$ mit $q'\in\mathrm{Im}(\mathbb{H})$, so gilt $qv=vq$ genau dann, wenn $q'v=q'v$ gilt und hierfür rechnen wir

$$(q'+v)(q'-v) = q'^{-}q'v + vq' - v^2 = q'^2 - v^2 = -|q'|^2+|v|^2,$$

wobei wir im letzten Schritt Aufgabenteil (2) benutzt haben. Allgemein folgt aus $q'wq'^{-1}=v$ aber sicherlich auch $q'\frac{w}{|q'|}q'^{-1} = \frac{w}{|q'|}$ und für $v=\frac{w}{|q'|}$ lernen wir dann $(q'-v)(q'+v)=0$, also $q'=\pm v$ und damit $|q'|w = \pm q'$. Aber die obige Gleichung soll ja für alle $w\in\mathrm{Im}(\mathbb{H})$ gelten, also muss $q'=0$ sein, und damit

$q = \lambda 1$. Da die Abbildung ein Gruppenhomomorphismus ist, folgt dass zwei Quaterionen q, s auf die gleiche Rotation geschickt werden, wenn $q = \lambda s$ für ein $\lambda \neq 0$, was genau die Injektivität zeigt.

Für die Surjektivität steht ja im Hinweis ein Urbild, was man durch eine längliche Rechnung einfach verifizieren kann (und mein Plan war, dass sie das einfach benutzen, aber das hatte ich wohl nicht gut formuliert). Als stetige Bijektion von einem kompakten in einen Hausdorffraum ist unsere Abbildung $\mathbb{RP}^3 \to \mathrm{SO}(3)$ ein Homöomorphismus.

Der Vollständigkeit hier ein etwas einfacheres Argument für die Surjektivität: Dafür rechnet man einmal nach, dass für zwei $u, v \in \mathrm{Im}(\mathbb{H})$ die Formel

$$u \cdot v = -\langle u, v\rangle \cdot 1 + u \times v$$

gilt, wo auf der rechten das Kreuzprodukt von Vektoren im $\mathbb{R}^3$ steht; das folgt durch direktes Einsetzen in die Definition. Es folgt insbesondere, dass $u \cdot v = -v \cdot u$, wenn u, v orthogonal zu einander stehen.

Sie haben hoffentlich in der linearen Algebra auch gelernt, dass jede Drehung im $\mathbb{R}^3$ ein Produkt von zwei Spiegelungen an Ebenen ist. Und ich behaupte, dass die Spiegelung an der zu $u \in \mathrm{Im}(\mathbb{H})$ mit $|u| = 1$ orthogonalen Hyperebene durch $v \mapsto u v u$ gegeben ist: Es gilt nämlich gemäß vorigem Aufgabenteil $u^2 = -1$, sodass $u u u = -u$, und ist v orthogonal zu u, so gilt $u v = -v u$ nach der gerade gemachten Bemerkung und damit $u v u = -v u u = v$. Und für das Produkt von zwei solcher Spiegelungen sehen wir dann,

$$v \mapsto u u' v u' u = (u u')v(-u')(-u) = (u u')v(u'^{-1} u^{-1}) = u u' v (u u')^{-1}$$

was das Bild von $u u' \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ unter unserer Abbildung ist.

□

Ziel der vierten Aufgabe ist zu zeigen, dass die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}^n$ die einzige ist, die $\mathbb{R}^n$ zu einem hausdorff'schen topologischen Vektorraum macht.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Sei also $\mathcal{T}$ eine solche Topologie.

1. Zeigen Sie, dass die Identität des $\mathbb{R}^n$ bezüglich der euklidischen Topologie in der Quelle und $\mathcal{T}$ im Ziel stetig ist, und damit $\mathcal{T}$ gröber als die euklidische Topologie.
2. Folgern Sie, dass $\mathrm{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ auch bezüglich $\mathcal{T}$ abgeschlossen ist.
3. Zeigen Sie, dass jede bezüglich $\mathcal{T}$ offene Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$ noch eine um 0 sternförmige enthält.
4. Folgern Sie aus (2) und (3), dass $\mathcal{T}$ auch feiner als die euklidische Topologie ist.

Hinweis: (3) gilt in jedem topologischen $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Lösungsskizze.

1. Die Identitätsabbildung können wir natürlich als

$$(t_1, \ldots, t_n) \mapsto t_1 \cdot e_1 + \cdots + t_n \cdot e_n$$

schreiben, wo die e_i die Einheitsvektoren von $\mathbb{R}^n$ sind. Aber Addition und Skalarmultiplikation sind per Annahme von die Topologie $\mathcal{T}$ stetig, also auch diese Funktion, also Komposition hiervon mit den ebenfalls stetigen Projektionen $\mathbb{R}^n \to R$ (bezüglich der euklidischen Topologie!). Es ist also jede bezüglich $\mathcal{T}$ offene Menge auch euklidisch offen.

2. Da $\mathrm{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt ist, ist das auch ihr Bild unter jeder stetigen Abbildung, insbesondere der gerade als stetig nachgewiesenen Identität mit $\mathcal{T}$ im Ziel. Aber da T Hausdorff'sch ist, ist jede bezüglich $\mathcal{T}$ kompakte Teilmenge auch abgeschlossen bezüglich $\mathcal{T}$.

3. Ist $0 \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine solche Umgebung. Da die Skalarmultiplikation $\mu\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig bezüglich $\mathcal{T}$ (und seinem Produkt mit der euklidischen Topologie in der Quelle) ist, gibt es nach Definition der Produkttopologie ein $\epsilon > 0$ und $0 \in V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen bezüglich $\mathcal{T}$ mit

   $$]-\epsilon, \epsilon[\times V \subseteq \mu^{-1}(U),$$

   mit anderen Worten $\lambda \cdot x \in U$ wann immer $|\lambda| < \epsilon$ und $x \in V$. Die Menge

   $$\mu(]-\epsilon, \epsilon[\times V) = \bigcup_{0 > |\lambda| < \epsilon} \lambda \cdot V$$

   leistet dann das gewünschte: Die Sternförmigkeit um 0 ist hoffentlich aus der linken Beschreibung klar, und dass es eine Umgebung von 0 sieht man an der rechten, da mit V auch jede der Menge $\lambda \cdot V$ bezüglich $\mathcal{T}$ offen ist, da Multiplikation mit λ ein Homöomorphismus ist (mit Inversem gegeben durch Multiplikation mit $\frac{1}{\lambda}$).

4. Denn ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von 0 bezüglich der euklidischen Topologie, so enthält sie eine Kugel $\mathrm{D}_\epsilon(0)$ für ein $\epsilon > 0$. Die Randsphäre $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \epsilon = |x|\}$ dieser Kugel ist gemäß (2) (multipliziert mit ϵ) auch bezüglich $\mathcal{T}$ abgeschlossen, also ihr Komplement $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \epsilon \neq |x|\}$ offen bezüglich $\mathcal{T}$. Nach (3) muss sie also eine um 0 sternförmige Umgebung V enthalten, und diese muss vollständig in $\mathrm{D}_\epsilon(0)$ liegen, denn die Strecke die 0 mit jedem Punkt außerhalb dieser Kugel verbindet schneidet die Randsphäre. Aber damit ist $\mathrm{D}_\epsilon(0)$, und damit erst recht U eine Umgebung von 0 bezüglich $\mathcal{T}$.

   Und ist U eine Umgebung von $z \in \mathbb{R}^n$, so wende obiges Argument auf $U - z$ an, um zu sehen dann $U - z$ eine Umgebung von 0 bezüglich $\mathcal{T}$ ist und damit U eine von z (weil Addition von $\pm z$ inverse Homöomorphismen bezüglich $\mathcal{T}$ sind). Das liefert also aus der euklidischen Offenheit von U die bezüglich $\mathcal{T}$.

$\square$