Aufgabe 1 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass ein erstabzählbarer überdeckungskompakter topologischer Raum auch folgenkompakt ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass jeder kompakte Hausdorffraum automatisch T4 ist, also dass je zwei abgeschlossenen disjunkten Teilmengen immer noch disjunkte Umgebungen haben.

Ziel der dritten Aufgabe ist es den Hamilton'schen Homöomorphismus $\mathbb{RP}^3 \longrightarrow \mathrm{SO}(3)$ zu konstruieren.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass für die Vorschrift
$$(z,w)\cdot(x,y) \coloneqq (zx - w\overline{y}, zy + w\overline{x})$$
auf $\mathbb{C}^2$ die Gleichung $|(z,w)\cdot(x,y)| = |(z,w)|\cdot|(x,y)|$ für alle $x,y,z,w \in \mathbb{C}$ erfüllt und $\mathbb{C}^2$ zusammen mit der komponentenweisen Addition zu einem Schiefkörper $\mathbb{H}$, den *Quaternionen*, mit Einselement $(1,0)$ macht.

2. Der reelle Untervektorraum
$$\mathrm{Im}(\mathbb{H}) = \{x \in \mathbb{H} \mid x^2 \in \mathbb{R}_{\leq 0}\}$$
von $\mathbb{H}$ wir von $i \coloneqq (i,0)$, $j \coloneqq (0,1)$ und $k \coloneqq (0,i)$ erzeugt.

3. Die Abbildung
$$\mathbb{H}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathrm{SO}(\mathrm{Im}(\mathbb{H})), \quad q \longmapsto [v \mapsto qvq^{-1}]$$
liefert den gesuchten Homöomorphismus.

Hinweis: Für die Surjektivität in (3) haben Sie hoffentlich in der linearen Algebra gezeigt, dass jedes Element aus SO(3) eine Rotation um eine Achse $u \in \mathrm{S}^2$ mit einem Winkel $\varphi \in \mathbb{R}$ ist. Diese entspricht dem Quaternion $\cos(\frac{\varphi}{2})\cdot 1 + \sin(\frac{\varphi}{2})\cdot(u_1 i + u_2 j + u_3 k)$.

Ziel der vierten Aufgabe ist zu zeigen, dass die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}^n$ die einzige ist, die $\mathbb{R}^n$ zu einem hausdorff'schen topologischen Vektorraum macht.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Sei also $\mathcal{T}$ eine solche Topologie.

1. Zeigen Sie, dass die Identität des $\mathbb{R}^n$ bezüglich der euklidischen Topologie in der Quelle und $\mathcal{T}$ im Ziel stetig ist, und damit $\mathcal{T}$ gröber als die euklidische Topologie.

2. Folgern Sie, dass $\mathrm{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ auch bezüglich $\mathcal{T}$ abgeschlossen ist.

3. Zeigen Sie, dass jede bezüglich $\mathcal{T}$ offene Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$ noch eine um 0 sternförmige enthält.

4. Folgern Sie aus (2) und (3), dass $\mathcal{T}$ auch feiner als die euklidische Topologie ist.

Hinweis: (3) gilt in jedem topologischen $\mathbb{R}$-Vektorraum.