

### **Aufgabe 1 (5 Punkte)**

Zeigen Sie, dass eine Teilmenge  $A \subseteq \mathbb{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  bezüglich der Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz genau dann kompakt ist, wenn sie abgeschlossen, punktweise beschränkt und gleichgradig stetig ist; das bedeutet, dass es zu jedem  $x \in \mathbb{R}$  und  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, sodass

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

für alle  $f \in A$  gilt.

Hinweis: Wir haben gezeigt, dass dieser Raum metrisierbar ist, es reicht für die Kompaktheit also Folgenkompaktheit nachzuweisen. Zeigen Sie dafür zunächst, dass es zu einer gegebenen Folge in  $A$  eine auf  $\mathbb{Q}$  punktweise konvergente Teilfolge gibt, und benutzen sie dann die gleichgradige Stetigkeit um auf ganz  $\mathbb{R}$  zu schließen.

### **Aufgabe 2 (5 Punkte)**

Zeigen Sie, dass eine offene Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}$  zu keiner offenen Teilmenge  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  mit  $n > 1$  homöomorph ist.

### **Aufgabe 3 (5 Punkte)**

Zeigen Sie, dass die Karten auf  $S^n$ , die aus den stereographischen Projektionen entstehen, im gleichen glatten Atlas liegen, wie die, die der Satz über implizite Funktionen liefert.

### **Aufgabe 4 (5 Punkte)**

Zeigen Sie, dass die Homöomorphismen

$$\mathbb{R}P^1 \cong S^1, \quad \mathbb{C}P^1 \cong S^2, \quad \mathbb{R}P^3 \cong \text{SO}(3)$$

die wir in der Vorlesung und vorigen Übungen konstruiert haben, allesamt glatte Diffeomorphismen (also glatt mit glatter Umkehrabbildung) sind, wenn wir beide Seiten jeweils mit ihren glatten Strukturen aus der Vorlesung ausrüsten.