Aufgabe 1 (5 Punkte)

Bezüglich welcher Topologie von punktweiser, lokalgleichmäßiger und gleichmäßiger Konvergenz ist die Gruppe der Homöomorphismen des $\mathbb{R}^n$ eine topologische Gruppe?

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Ziel der Aufgabe ist es zu zeigen, dass die Grassmann'sche $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $k(n-k)$ bildet. Zeigen Sie dazu:

1. Ist $P \oplus Q = \mathbb{R}^n$ eine Zerlegung als direkte Summe zweier Untervektorräume, mit $\dim(P) = k$ und $\dim(Q) = (n-k)$, dann ist
$$\varphi_{P,Q} \colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(P,Q) \longrightarrow \{V \in \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n) \mid V \cap Q = \{0\}\}, \quad \varphi \longmapsto \mathrm{im}(\varphi + \mathrm{id}_P)$$
eine Karte von $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$.
2. Für variierendes P, Q und lineare Isomorphismen $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(P,Q) \cong \mathbb{R}^{k(n-k)}$ bilden die $\varphi_{P,Q}$ einen glatten Atlas von $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$.

Wie vergleicht sich dieser im Falle $k = 1$ mit dem von $\mathbb{RP}^{n-1}$ aus der Vorlesung?

Für die nächsten zwei Aufgaben setzen wir
$$\gamma_n := \{(v, V) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{RP}^n \mid v \in V\},$$
der *tautologische Raum* des $\mathbb{RP}^n$, mit den Unterräumen
$$\mathrm{D}(\gamma_n) := \{(v, V) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{RP}^n \mid v \in V, |v| \leq 1\} \quad \text{und} \quad \mathrm{S}(\gamma_n) := \{(v, V) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{RP}^n \mid v \in V, |v| = 1\},$$
und der Einbettung $n \colon \mathbb{RP}^n \to \gamma_n$, $V \mapsto (0, V)$.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Es sei $\mathcal{M}$ der topologische Raum $([0, 2\pi] \times \mathbb{R})/\sim$ wo $(x,t) \sim (y,s)$ falls entweder $(x,t) = (y,s)$ oder $\{x, y\} = \{0, 2\pi\}$ und $s = -t$, und $\mathcal{M}_{\leq 1} \subseteq \mathcal{M}$, der Teilraum durch die Äquivalenzklassen aller (x,t) mit $|t| \leq 1$ gegeben ist; es ist $\mathcal{M}_{\leq 1}$ das *Möbiusband*. Konstruieren Sie einen Homöomorphismus $\psi \colon \mathcal{M} \longrightarrow \gamma_1$ derart, dass
$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "(\cos,\sin)\circ \mathrm{pr}_1"'] & \gamma_1 \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\ \mathrm{S}^1 \arrow[r, "x \mapsto \langle \pm\sqrt{x} \rangle"] & \mathbb{RP}^1 \end{tikzcd}$$
kommutiert und ψ sich zu einem Homöomorphismus $\mathcal{M}_{\leq 1} \to \mathrm{D}(\gamma_1)$ einschränkt. Folgern Sie, dass $\gamma_1 \setminus \mathrm{im}(n)$ homöomorph zu $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}_{>0}$ ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung
$$\gamma_n \longrightarrow \mathbb{RP}^{n+1}, \quad (v, [x]) \longrightarrow [(x, \langle x, v \rangle)]$$
ein Homöomorphismus auf die offene Teilmenge $\mathbb{RP}^{n+1} \setminus \{\{0\} \times \mathbb{R}\}$ des $\mathbb{R}P^{n+1}$ ist.
2. Modifizieren Sie diese Abbildung zu einem Homöomorphismus
$$\mathrm{D}(\gamma_n)/\mathrm{S}(\gamma_n) \longrightarrow \mathbb{RP}^{n+1}.$$

Anmerkung: Offenbar ist $\mathrm{pr}_1 \colon \mathrm{S}(\gamma_n) \to \mathrm{S}^n$ ein Homöomorphismus ist. Nimmt man die beiden Aufgaben zusammen, steht hier also insbesondere, dass man $\mathbb{RP}^2$ erhält indem man den Randkreis des Möbiusbandes auf einen Punkt kollabiert!