

Ist M eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit und $N \subseteq M$, so heißt eine Karte (U, V, φ) von M eine l -dimensionale Untermannigfaltigkeitskarte von N , wenn $\varphi^{-1}(V \cap (\mathbb{R}^l \times \{0\})) = U \cap N$ gilt. Es heißt dann N eine Untermannigfaltigkeit von M , wenn es sich durch Untermannigfaltigkeitskarten überdecken lässt und trägt M eine C^k -Struktur, so heißt N eine C^k -Untermannigfaltigkeit, wenn es sich dies durch C^k -Karten erreichen lässt.

Aufgabe 1 (5 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass die C^k -Untermannigfaltigkeitskarten eine C^k -Struktur auf einer C^k -Untermannigfaltigkeit $N \subseteq M$ liefern und dass eine Abbildung $K \rightarrow N$ genau dann k -fach stetig differenzierbar ist (K eine beliebige C^k -Mannigfaltigkeit), wenn es die Komposition $K \rightarrow N \rightarrow M$ ist.
2. Finden Sie eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$, die keine C^1 -Untermannigfaltigkeit ist.

Lösungsvorschlag. 1. Wir beobachten erst einmal, dass eine Abbildung $f: W \rightarrow \mathbb{R}^b$, $W \subseteq \mathbb{R}^a$ offen, genau dann k -fach stetig differenzierbar ist, wenn es ihre Komposition mit irgendeiner linearen Injektion $i: \mathbb{R}^b \rightarrow \mathbb{R}^c$ ist. Ist f k -fach stetig differenzierbar, so folgt das für $i \circ f$ sofort aus der Kettenregel da lineare Abbildungen natürlich glatt sind. Für die andere Richtung beobachten wir, dass es zu i eine lineare Abbildung $r: \mathbb{R}^c \rightarrow \mathbb{R}^b$ mit $r \circ i = \text{id}$ gibt (etwa wegen des Basisergänzungssatzes!). Damit gilt $f = r \circ (i \circ f)$ und das gleiche Argument lässt sich nochmal anwenden.

Nun zur eigentlichen Aufgabe: Wir haben zu zeigen, dass die Abbildung

$$V \cap \varphi(U') \cap (\mathbb{R}^l \times \{0\}) \xrightarrow{\varphi^{-1}} U \cap U' \cap N \xrightarrow{\psi} \psi(U) \cap V' \cap (\mathbb{R}^l \times \{0\})$$

k -fach stetig differenzierbar ist. Nach der Vorbemerkung reicht es das nach Nachschalten der Inklusion $i: \mathbb{R}^k \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^m$ zu prüfen. Aber das Ergebnis ist gleich

$$V \cap \varphi(U') \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}) \xrightarrow{i} V \cap \varphi(U') \xrightarrow{\varphi^{-1}} U \cap U' \xrightarrow{\psi} \psi(U) \cap V'$$

und i ist natürlich als lineare Abbildung glatt und die Komposition der beiden anderen Abbildungen nach Annahme k -fach stetig differenzierbar.

Und die k -fache stetige Differenzierbarkeit von f besagt, dass für jede C^k -Karte (W, X, θ) von K mit $W \subseteq f^{-1}(U \cap N)$ die Komposition

$$X \xrightarrow{\theta^{-1}} W \xrightarrow{f} U \cap N \xrightarrow{\varphi} V \cap (\mathbb{R}^l \times \{0\})$$

k -fach stetig differenzierbar ist. Aber wieder nach Vorbemerkung dürfen wir um das zu testen äquivalent die Inklusion i nachschalten, was

$$X \xrightarrow{\theta^{-1}} W \xrightarrow{f} U \xrightarrow{\varphi} V,$$

wessen k -fach Differenzierbarkeit für alle C^k -Karten (W, X, θ) sich wie gewünscht genau in die Differenzierbarkeit von $f: K \rightarrow M$ übersetzt.

2. Wir nehmen $N = \mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$. Um zu sehen, dass das eine Untermannigfaltigkeit ist, bedürfen wir nur einer einzigen Karte (die den Knick gerade biegt): Es ist nämlich

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \longmapsto (x - y, \min(x, y))$$

ein Homöomorphismus; die Umkehrabbildung ist

$$(x, y) \longmapsto \begin{cases} (x + y, y) & x \geq 0 \\ (y, y - x) & x \leq 0 \end{cases}$$

Damit ist φ eine Karte von $\mathbb{R}^2$ und es gilt genau $N = \varphi^{-1}(\mathbb{R} \times \{0\})$: Es gilt $(x, y) \in N$ genau dann, wenn $\min(x, y) = 0$ genau dann, wenn $\varphi(x, y) \in \mathbb{R} \times \{0\}$. Es ist also $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2, \varphi)$ eine Untermannigfaltigkeitskarte von N .

Aber eine differenzierbare Untermannigfaltigkeitskarte um 0 kann es nicht geben: Ist (U, V, φ) mit $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $\varphi: U \rightarrow V$ differenzierbar mit differenzierbarer Umkehrung, $0 \in U$ und $\varphi(N \cap U) = V \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$,

so ist $(D_0\varphi)e_2$ und $(D_0\varphi)e_1$ auf der einen Seite linear unabhängig, weil $D_0\varphi$ ja invertierbar ist, aber auch beide in $\mathbb{R} \times \{0\}$ enthalten, da

$$D_0(\varphi)e_1 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(0) - \varphi(te_1)}{t}$$

und die rechte Seite liegt per Annahme in $\mathbb{R}^1 \times \{0\}$, analog für e_2 . Widerspruch. □

Achtung: Die folgende Aufgabe hat auf dem Aufgabenzettel einen Fehler gehabt (ich habe aus Versehen gefordert, dass $T_{f(x)}N \subseteq T_{f(x)}M$ im Bild $D_x f: T_x K \rightarrow T_{f(x)}M$ liegt, anstatt der Bedingung unten). Wir haben sie daher aus der Wertung genommen.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Es sei $f: K \rightarrow M$ eine k -fach stetig differenzierbare Abbildung zwischen C^k -Mannigfaltigkeiten mit $k \geq 1$, $N \subseteq M$ eine C^k -Untermannigfaltigkeit, derart dass für alle $x \in K$ mit $f(x) \in N$ die Summe von $T_{f(x)}N$ und des Bildes von $D_x f: T_x K \rightarrow T_{f(x)}M$ ganz $T_x M$ ist. Zeigen Sie, dass dann $f^{-1}(N)$ eine C^k -Untermannigfaltigkeit von K ist.

Hinweis: Zeigen Sie das zunächst für $K \subseteq \mathbb{R}^l$ offen und $N = \{0\} \subseteq \mathbb{R}^m = m$, indem Sie beim Satz über implizite Funktionen noch einmal genau hinsehen.

Lösungsvorschlag. Wir folgen dem Hinweis und behaupten, dass der Satz über implizite Funktionen in diesem Fall sogar eine Untermannigfaltigkeitskarte bei jedem $x \in f^{-1}(0)$ liefert: Per Annahme ist nämlich $D_x f: \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^m$ surjektiv und wenn wir uns dann eine Zerlegung $\mathbb{R}^l = Q \oplus P$ wählen, mit $D_x f: P \rightarrow \mathbb{R}^m$ invertierbar, so liefert er offene $W \subseteq P$ und $V \subseteq Q$ und k -fach differenzierbares $g: V \rightarrow W$ mit $V + W \subseteq K$ und $f(v + w) = 0$ genau dann, wenn $g(v) = w$.

Aber dann können wir

$$h: V \times W \longrightarrow \mathbb{R}^l, \quad (v, w) \longmapsto v + w + g(v)$$

betrachten. Es gilt dann

$$D_{v+w} h = \begin{pmatrix} \text{id}_Q & 0 \\ D_v g & \text{id}_P \end{pmatrix},$$

was offenbar invertierbar ist. Es folgt also aus dem Satz über die Umkehrfunktion, dass h eine offene Abbildung ist und weil offenbar injektiv, ist es ein k -fach stetig differenzierbarer Homöomorphismus auf sein Bild, mit k -fach stetig differenzierbarer Umkehrabbildung. Es ist dann $(h(V + W), V + W, h^{-1})$ beinahe die gesuchte Karte, da per Konstruktion

$$h((V + W) \cap (Q \times \{0\})) = h(V \times \{0\}) = h(V + W) \cap f^{-1}(0)$$

gilt. Bleibt nur noch einen linearen Isomorphismus $a: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ zu wählen, der Q in $\mathbb{R}^{l-m} \times \{0\}$ überführt zu wählen (Basisergänzungssatz!), dann ist $(h(V + W), l(V + W), (l \circ h)^{-1})$ die gesuchte Untermannigfaltigkeitskarte von $f^{-1}(0)$ um x .

Nun zum allgemeinen Fall: Sei also $x \in f^{-1}(N)$ beliebig, so wählen wir eine C^k -Untermannigfaltigkeitskarte (U, V, φ) von $N \subseteq M$ um $f(x)$. Betrachte dann die Abbildung

$$g: f^{-1}(U) \xrightarrow{f} U \xrightarrow{\varphi^{-1}} V \subseteq \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-m} \xrightarrow{\text{pr}_2} \mathbb{R}^{n-m}$$

Da $\varphi^{-1}(N \cap U) = \mathbb{R}^n \times \{0\}$ ist $U \cap N$ genau die Nullstellenmenge der Komposition $U \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ und damit $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(N)$ genau die Nullstellenmenge von g . Die Bedingung an die Ableitung von f stellt nun genau sicher, dass $D_x g: T_x K \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ surjektiv ist, sodass die Vorüberlegung zuschlägt. □

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Finden Sie eine Funktion $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ zusammen mit einem regulären Wert $w \in \mathbb{R}$, so dass $h^{-1}(w)$ diffeomorph zum Torus

$$T^2 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 = 1 = z^2 + w^2\}$$

ist.

Lösungsvorschlag. Es soll $h^{-1}(w)$ aus allen Punkten des $\mathbb{R}^3$ bestehen, die von allen Punkten des Kreises in $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ von Radius 2 um 0 den Abstand 1 haben, mit anderen also

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left| (x, y, z) - 2 \frac{(x, y, 0)}{\|(x, y)\|} \right| = 1 \right\}$$

Wir rechnen dann

$$\left| (x, y, z) - \frac{2}{\|(x, y)\|} (x, y, 0) \right|^2 = \dots = x^2 + y^2 + z^2 - 4\sqrt{x^2 + y^2} + 4$$

und nehmen dann

$$h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4\sqrt{x^2 + y^2}$$

als Definition mit $w = -3$. Das ist weg vom Nullpunkt differenzierbar und wir haben

$$D_{(x, y, z)} h = \begin{pmatrix} 2x - \frac{4x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ 2y - \frac{4y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\ 2y \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\ 2z \end{pmatrix}$$

Dass (x, y, z) kein regulärer Punkt ist bedeutet, dass diese Ableitung 0 ist. Das impliziert sicherlich $z = 0$ und da dann nicht auch noch sowohl $x = 0$ als auch $y = 0$ gilt, folgt $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$. Aber dann folgt $h(x, y, z) = 4 + 0 - 8 = -4$. Also ist -3 ein regulärer Wert von h .

Der Diffeomorphismus von T^2 soll nun den Kreis $S^1 \times \{(0, \pm 1)\}$ auf den Kreis $2 \cdot S^1 \times \{\pm 1\} \subseteq h^{-1}(-3)$ abbilden und $S^1 \times \{(\pm 1, 0)\}$ auf die Kreise $(2 \pm 1) \cdot S^1 \times \{0\}$. Etwas herumprobieren liefert

$$T^2 \longrightarrow h^{-1}(-3), \quad (x, y, z, w) \longmapsto ((2+z)x, (2+z)y, w);$$

die Umkehrabbildung

$$h^{-1}(-3) \longrightarrow T^2, \quad (x, y, z) \longmapsto \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sqrt{x^2 + y^2} - 2, z \right)$$

ist, das (einfache!) Nachrechnen spare ich mir hier einmal. Offenbar sind beide Abbildungen glatt. $\square$

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Es sei $A \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$. Dann induziert A eine Abbildung

$$A: \mathbb{RP}^n \longrightarrow \mathbb{RP}^n, \quad l \longmapsto A \cdot l.$$

Zeigen Sie, dass diese glatt ist und berechnen Sie die Ableitung

$$D_l A: \text{Hom}_{\mathbb{R}}(l, \mathbb{R}^{n+1}/l) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(A \cdot l, \mathbb{R}^{n+1}/A \cdot l)$$

unter dem Isomorphismus $c_l: T_l \mathbb{RP}^n \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(l, \mathbb{R}^{n+1}/l)$ aus der Vorlesung.

Lösungsskizze. Wir beobachten, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1} & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^{n+1} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \mathbb{RP}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{RP}^n \end{array}$$

kommutiert, und damit auch für $x \in l$ auch

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1} & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^{n+1} \\ \downarrow D_x \pi & & \downarrow D_{Ax} \pi \\ T_l \mathbb{RP}^n & \xrightarrow{D_l A} & T_{A \cdot l} \mathbb{RP}^n \end{array}$$

da ja die Ableitung einer linearen Abbildung von euklidischen Räumen konstant ist.

Nun erinnere ich daran, dass der Isomorphismus $c_l: T_l \mathbb{R}P^n \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(l, \mathbb{R}^{n+1}/l)$ weg von Null durch die Formel $v \mapsto [x \mapsto d_x^{-1}(v)]$ gegeben ist, wobei $d_x: \mathbb{R}^{n+1}/l \rightarrow T_l \mathbb{R}P^n$ von $D_x \pi$ induziert ist.

Aus obigem Diagramm folgt also $D_l A \circ d_x = d_{Ax} \circ A$, und damit rechnen wir nach, dass

$$\begin{array}{ccc} T_l \mathbb{R}P^n & \xrightarrow{D_l A} & T_{Al} \mathbb{R}P^n \\ \downarrow c_l & & \downarrow c_{Al} \\ \text{Hom}_{\mathbb{R}}(l, \mathbb{R}^{n+1}/l) & \xrightarrow{A \circ - \circ A^{-1}} & \text{Hom}_{\mathbb{R}}(Al, \mathbb{R}^{n+1}/Al) \end{array}$$

kommutiert (was die gesuchte Berechnung ist): Ober herum haben wir nämlich

$$v \mapsto D_l(A)(v) \mapsto [y \mapsto d_y^{-1}(D_l(A)(v))]$$

und unter herum

$$v \mapsto [y \mapsto d_y^{-1}(v)] \mapsto [y \mapsto A \cdot d_{A^{-1}y}^{-1}(v)]$$

und obige Gleichung ist offenbar zu $d_{Ax}^{-1} \circ D_l A = A \cdot d_x^{-1}$ äquivalent und setzen wir hier $x = A^{-1}y$ ein sehen wir dass die beiden Kompositionen übereinstimmen. $\square$