

Ist M eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit und $N \subseteq M$, so heißt eine Karte (U, V, φ) von M eine k -dimensionale *Untermannigfaltigkeitskarte* von N , wenn $\varphi^{-1}(V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})) = U \cap N$ gilt. Es heißt dann N eine *Untermannigfaltigkeit* von M , wenn es sich durch Untermannigfaltigkeitskarten überdecken lässt und trägt M eine C^k -Struktur, so heißt N eine C^k -Untermannigfaltigkeit, wenn es sich dies durch C^k -Karten erreichen lässt.

Aufgabe 1 (5 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass die C^k -Untermannigfaltigkeitskarten eine C^k -Struktur auf einer C^k -Untermannigfaltigkeit $N \subseteq M$ liefern und dass eine Abbildung $K \rightarrow N$ genau dann k -fach stetig differenzierbar ist (K eine beliebige C^k -Mannigfaltigkeit), wenn es die Komposition $K \rightarrow N \rightarrow M$ ist.
2. Finden Sie eine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^2 , die keine C^1 -Untermannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Es sei $f: K \rightarrow M$ eine k -fach stetig differenzierbare Abbildung zwischen C^k -Mannigfaltigkeiten mit $k \geq 1$, $N \subseteq M$ eine C^k -Untermannigfaltigkeit, derart dass für alle $x \in K$ mit $f(x) \in N$ der Unterraum $T_{f(x)}N \subseteq T_{f(x)}M$ im Bild $D_x f: T_x K \rightarrow T_{f(x)}M$ liegt. Zeigen Sie, dass dann $f^{-1}(N)$ eine C^k -Untermannigfaltigkeit von K ist.

Hinweis: Zeigen Sie das zunächst für $K \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $M = \mathbb{R}^m$, indem Sie beim Satz über implizite Funktionen noch einmal genau hinsehen.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Finden Sie eine Funktion $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ zusammen mit einem regulären Wert $y \in \mathbb{R}$, so dass $h^{-1}(y)$ diffeomorph zum Torus

$$T^2 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 = 1 = z^2 + w^2\}$$

ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Es sei $A \in GL_{n+1}(\mathbb{R})$. Dann induziert A eine Abbildung

$$A: \mathbb{R}P^n \longrightarrow \mathbb{R}P^n, \quad l \longmapsto A \cdot l.$$

Zeigen Sie, dass diese glatt ist und berechnen Sie die Ableitung

$$D_l A: \text{Hom}_{\mathbb{R}}(l, \mathbb{R}^{n+1}/l) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(A \cdot l, \mathbb{R}^{n+1}/A \cdot l)$$

unter dem Isomorphismus $T_l \mathbb{R}P^n \cong \text{Hom}_{\mathbb{R}}(l, \mathbb{R}^{n+1}/l)$ aus der Vorlesung.