

# Geometrie und Topologie

Fabian Hebestreit



# Contents

Kapitel 1. Mengentheoretische Topologie	5
1. Metrische Räume	5
2. Topologische Räume	10
3. Beispiele und Konstruktionen topologischer Räume	15
4. Trennungseigenschaften	35
5. Die Abzählbarkeitsaxiome	38
6. Zusammenhang	41
7. Kompaktheit	48
8. Das Zorn'sche Lemma*	56
9. Der Satz von Gelfand-Naimark*	59
Kapitel 2. Mannigfaltigkeiten und Bündel	67
1. Topologische Mannigfaltigkeiten	67
2. Glatte Strukturen	72
3. Tangentialräume und Ableitungen	75
4. Faserbündel	85



## Mengentheoretische Topologie

In diesem Kapitel werden wir die Grundbegriffe dieser Vorlesung einführen und studieren, insbesondere den des topologischen Raums, der einige Unzulänglichkeiten des Begriffs der metrischen Räume bereinigt. Ich fange also mal damit an, an diesen Begriff zu erinnern und einige Probleme mit ihm aufzuzeigen.

### 1. Metrische Räume

Im ersten Semester ist Ihnen wohl der Begriff der stetigen Abbildung  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  über den Weg gelaufen: Zu jedem  $x \in [a, b]$  und  $\epsilon > 0$  muss es dazu ein  $\delta > 0$  geben, so dass aus

$$|x - t| < \delta \quad \text{schon} \quad |f(x) - f(t)| < \epsilon$$

folgt. Wir bezeichnen die Menge der stetigen Funktionen dieser Sorte mit  $C([a, b], \mathbb{R})$ . Den Begriff der Stetigkeit haben sie in den folgenden Semestern dann hoffentlich zu Stetigkeit von Funktionen  $U \rightarrow \mathbb{R}^m$ , mit  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  ausgebautet (mit wörtlich gleicher Definition). Ich hoffe Sie haben auch die Feststellung gemacht, dass für die Funktion

$$\int: C([a, b], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \longmapsto \int_a^b f$$

und jedes  $f \in C([a, b], \mathbb{R})$  und  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass aus

$$\|g - f\| < \delta \quad \text{schon} \quad \left| \int_a^b g - \int_a^b f \right| < \epsilon$$

folgt (nämlich tut es  $\delta = \frac{\epsilon}{b-a}$ ), wo  $\|f\| = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$ . Um dies ebenfalls als eine Art Stetigkeit zu deuten, ist ihnen dann hoffentlich folgende Definition untergejubelt worden:

**1.1. Definition** (Fréchet, 1906) Ist  $X$  eine Menge, so heißt eine Funktion  $d: X \times X \rightarrow [0, \infty]$  eine *Pseudometrik*, falls für alle  $x, y, z \in X$  gilt:

- (1)  $d(x, x) = 0$
- (2)  $d(x, y) = d(y, x)$ , und
- (3)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Sie heißt *Metrik*, wenn  $d(x, y) = 0$  nur bei  $x = y$  eintritt.

**1.2. Bemerkung** Es ist Geschmackssache ob man den Wert  $\infty$  für eine Metrik zulässt oder nicht. Typischerweise verzichtet man im ersten Semester darauf, um Studenten nicht mit dem Rechnen mit  $\infty$  unnötig zu verwirren, aber wir werden sehen, dass das nicht viel Einfluss hat, siehe 2.4 und hin und wieder einfachere Sprache zulässt, etwa im Beispiel der Supremumsmetrik unten.

**1.3. Beispiel** (1) Eine natürlich Quelle von Metriken sind die (Halb)normen auf einem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$ : Eine Halbnorm ist eine Funktion  $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  derart, dass für alle  $x, y \in V$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$

- (a)  $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- (b)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

gelten. Es ist eine Norm, wenn  $\|x\| = 0$  nur für  $x = 0$  gilt. Es ist dann für jede Halbnorm

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (v, w) \longmapsto \|v - w\|$$

eine Pseudometrik, und dies ist eine Metrik genau, wenn man mit einer Norm gestartet ist. (Hier ist es übrigens nicht zweckmäßig auch den Wert  $\infty$  für eine (Halb-)Norm zuzulassen, da sich dann die Skalarmultiplikation als unstetig erweisen kann, wie wir in den Übungen sehen werden.)

- (2) Auf dem  $\mathbb{R}^n$  ist

$$x \mapsto |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

eine Norm, die *euklidische Norm*. Und insbesondere  $(x, y) \mapsto |x - y|$  die *euklidische Metrik*.

- (3) Allgemeiner haben sie vielleicht gelernt, dass auch die Funktionen

$$x \mapsto |x|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}$$

für jedes  $p \geq 1$  eine Norm auf dem  $\mathbb{R}^n$  ist. Neben dem euklidischen Fall  $p = 2$  ist wohl noch  $p = 1$  berühmt, er liefert die Manhattan-Metrik  $(x, y) \mapsto |\sum_{i=1}^n x_i - y_i|$ . Und auch dem Fall  $p = \infty$  haucht man via

$$x \mapsto |x|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

Sinn ein, was ebenfalls eine Norm ist, und auch wirklich  $|x|_p \rightarrow |x|_\infty$  bei  $p \rightarrow \infty$  erfüllt, wie sie hoffentlich auch mal nachgerechnet haben.

- (4) Ähnliches gilt für  $p \in [1, \infty[$  und die Funktion

$$C([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad f \mapsto \sqrt[p]{\int_a^b |f|^p} \quad \text{bzw.} \quad \max_{t \in [a, b]} |f(t)|.$$

Die Formeln ergeben offenbar in größerer Allgemeinheit, die linken für alle möglichen Sorten integrierbarer Funktionen (mit endlichem Integral) und die rechte sogar auf beschränkte Funktionen (solange man nur max durch sup ersetzt). Man beachte aber, dass schon auf dem Raum der Riemann integrierbaren Funktionen die linken Formeln nur noch Halbnormen liefern: Jede Funktion, die an nur endlich vielen Stellen ungleich 0 ist, ist Riemann integrierbar mit verschwindendem Integral (für das Lebesgue Integral darf die Ausnahmemeße sogar abzählbar sein).

- (5) Ist überhaupt  $M$  eine Menge und  $(X, d)$  ein metrischer Raum, so können wir  $F(M, X)$ , die Menge der Funktionen  $M \rightarrow X$ , mit der Metrik

$$(f, g) \mapsto \sup_{m \in M} d(f(m), g(m))$$

ausstatten, der *Supremumsmetrik*; dies ist ein Fall in dem es sich als nützlich erweist zuzulassen, dass Metriken auch den Wert  $\infty$  annehmen dürfen: Selbst wenn  $d$  selbst das nicht tut, kann das Supremum in dieser Formel das durchaus tun (man nehme etwa  $M = \mathbb{R} = X$  und  $f = \text{id}$  und  $g = 0$ ).

Erlaubt man dies nicht, wird meist nur die Menge der beschränkten Funktionen (also diejenigen  $f$  für die  $\sup_{n, m \in M} d(f(n), f(m))$  endlich ist) mit der Supremumsmetrik versehen, von der man dann leicht prüft, dass auch sie nur endliche Werte annimmt. Im Falle  $M = [a, b]$ ,  $X = \mathbb{R}$  ist die Supremumsmetrik dann auch wirklich von der Norm aus dem vorigen Punkt induziert, wie man leicht prüft.

- (6) Hier noch ein paar einfache Beispiele von Pseudometriken, die sich weiter unten als nützlich erweisen werden: In der Situation des vorigen Beispiels liefert für jedes  $m \in M$  die Funktion

$$(f, g) \mapsto d(f(m), g(m))$$

eine Pseudometrik auf  $F(M, X)$ ; sie ist eine Metrik nur dann, wenn  $M = \{m\}$  gilt.

- (7) Hier vielleicht noch zwei Beispiele trivialerer Natur: Die Nullfunktion ist auf jeder Menge  $X$  eine Pseudometrik und die Funktion

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

sogar eine Metrik.

Ich erinnere dann auch noch an den allgemeinen Begriff der Stetigkeit und Konvergenz:

**1.4. Definition** Sind  $(X, d)$  und  $(Y, e)$  pseudometrische Räume, so heißt eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  stetig bei  $x \in X$ , wenn zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, sodass für alle  $x' \in X$

$$d(x, x') < \delta \implies e(f(x), f(x')) < \epsilon$$

gilt.

Und ist  $f: \mathbb{N} \rightarrow Y$  eine Folge, so konvergiert sie gegen  $y \in Y$ , wenn es zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $n \in \mathbb{N}$  gibt so, dass

$$e(f_k, y) < \epsilon$$

für alle  $k \geq n$  gilt.

Diese Definitionen fangen nun das anfangs geschilderte Beispiel  $\int: C([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  als eine stetige Abbildung ein, wenn man die Quelle mit der Supremumsmetrik versieht. Und sie haben hoffentlich auch gelernt, dass eine Folge von Funktionen konvergiert bezüglich der Supremumsmetrik genau dann gegen eine Funktion  $f$  konvergiert, wenn sie dies gleichmäßig tut (und nicht nur punktweise) tut. Da stetige Abbildungen konvergente Folgen auf konvergente Folgen abbilden, kodiert die Stetigkeit obiger Integralabbildung also auf sehr elegante Weise, dass

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n$$

immer dann gilt, wenn die Folge von stetigen Funktionen  $n \mapsto f_n$  eben gleichmäßig konvergiert (dann ist die Grenzfunktion natürlich von alleine ebenfalls stetig, aber das brauchen wir für unsere momentane Definition gar nicht wissen).

Nun haben sie vielleicht auch den um einiges allgemeineren (und auch schwieriger zu beweisenden) Satz von der beschränkten Konvergenz gesehen, der besagt, dass die Konvergenz des Integrals auch dann noch gilt, wenn die Konvergenz der Funktionenfolge  $f$  nur punktweise vorliegt, aber die Funktionen  $|f_n|$  eine gemeinsame obere Schranke  $s > 0$  erlauben, also  $|f_n(t)| \leq s$  für alle  $t \in [a, b]$  und  $n \in \mathbb{N}$  gilt (in diesem Falle ist die Grenzfunktion natürlich nicht mehr von alleine stetig, ja nichtmal mehr Riemann integrierbar; für die angenehmste Formulierung des Satzes braucht man deshalb den Lebesgue'schen Integralbegriff und dann ist Satz von der beschränkten Konvergenz im berühmten Lebesgue'schen Satz von der dominierten Konvergenz enthalten, den man häufig im Zuge der Maßtheorie beweist).

Es stellt sich jedenfalls hoffentlich naheliegender die Frage, ob es auch eine Metrik auf  $C([a, b], \mathbb{R})$  (oder einem noch größeren Funktionenraum) gibt, die die punktweise Konvergenz von Funktionenfolgen induziert. Gibt es nicht:

**1.5. Satz** Ist  $a < b$  so gibt es keine (Pseudo-)Metrik  $d$  auf  $C([a, b], \mathbb{R})$  derart, dass eine Folge bezüglich  $d$  genau dann konvergiert, wenn sie es punktweise tut.

BEWEIS. Nehmen wir an es gäbe so eine (Pseudo-)Metrik  $d$ . Wir behaupten als erstes, dass es dann zu jedem  $x \in \mathbb{R}$  eine Zahl  $\epsilon > 0$  gibt so, dass aus  $d(f, 0) < \epsilon$  schon  $|f(x)| < 1$  folgt. Denn sonst gäbe es eine Folge  $g: \mathbb{N} \rightarrow C([a, b], \mathbb{R})$  mit  $d(g_k, 0) \rightarrow 0$  bei  $k \rightarrow \infty$  aber  $|g_k(x)| \geq 1$  für alle  $k \geq 0$ . Aber so eine Folge würde wegen der ersten Bedingung gegen 0 konvergieren, wohingegen ihre Werte bei  $x$  sich 0 ja gar nicht annähern, im Widerspruch zur Wahl von  $d$ .

Wir sortieren nun die reellen Zahlen nach der nötigen Größe eines solchen  $\epsilon > 0$ . Setze dazu

$$M_n = \{x \in [a, b] \mid \text{Für alle } f \in C([a, b], \mathbb{R}) \text{ folgt aus } d(f, 0) < \frac{1}{n} \text{ schon } |f(x)| < 1\}.$$

für  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt offenbar  $M_n \subseteq M_{n+1}$  und die Vorüberlegung besagt genau, dass

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n = [a, b].$$

Da  $[a, b]$  überabzählbar ist, können nicht alle  $M_n$  endlich sein (denn eine abzählbare Vereinigung endlicher Mengen ist immer noch abzählbar; es muss natürlich sogar ein  $M_n$  selbst überabzählbar sein, aber das brauchen wir gar nicht). Wählen wir uns dann ein  $i \in \mathbb{N}$ , derart dass  $M_i$  unendlich ist, so gibt es eine Injektion  $f: \mathbb{N} \rightarrow M_i \subseteq [a, b]$ . Als beschränkte Folge enthält  $f$  nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß dann eine konvergente Teilfolge  $g: \mathbb{N} \rightarrow M_i$ , etwa mit Grenzwert  $x \in [a, b]$ . Da mit  $f$  auch  $g$  injektiv ist, nimmt  $g$  den Wert  $x$  dann höchstens einmal an. Insbesondere können wir noch einmal zu einer Teilfolge  $h$  von  $g$  übergehen, die den Wert  $x$  gar nicht mehr annimmt (aber sicher immer noch injektiv ist und gegen  $x$  konvergiert). Wir haben damit erreicht, dass jedes der Folgenglieder positiven Abstand zu allen anderen hat, mit anderen Worten es gilt für jedes  $n \in \mathbb{N}$

$$\inf_{m \neq n} |h_m - h_n| > 0 :$$

Denn wegen der Konvergenz von  $h$  gibt es ja ein  $k \in \mathbb{N}$ , sodass für alle  $m \geq k$

$$|h_m - x| < \frac{|h_n - x|}{2},$$

die rechte Seite ist schließlich per Annahme positiv, und damit

$$|h_m - h_n| = |h_m - h_n| + |h_m - x| - |h_m - x| \geq |h_n - x| - |h_m - x| > \frac{|h_n - x|}{2},$$

für alle  $m \geq k$ . Damit haben wir sicher

$$\inf_{m \neq n} |h_m - h_n| \geq \min_{m < k, m \neq n} \left\{ \frac{|h_n - x|}{2}, |h_m - h_n| \right\} > 0$$

wie behauptet. Nennen wir das Infimum links einmal  $e_n$ , so können wir nun stetige Funktionen  $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  hernehmen, die außerhalb von  $]h_n - \frac{e_n}{2}, h_n + \frac{e_n}{2}[$  verschwinden, aber  $f_n(h_n) = 2$  erfüllen (etwa indem wir einfach linear interpolieren). Diese Intervalle sind nun per Konstruktion alle disjunkt: Aus  $|h_n - t| < \frac{e_n}{2}$  folgt schließlich für  $n \neq m$

$$\begin{aligned} |h_m - t| &= |h_m - t| + |h_n - t| - |h_n - t| \\ &\geq |h_n - h_m| - |h_n - t| \\ &> |h_n - h_m| - \frac{e_n}{2} \\ &\geq |h_n - h_m| - \frac{|h_n - h_m|}{2} \\ &= \frac{|h_n - h_m|}{2} \\ &\geq \frac{e_m}{2} \end{aligned}$$

Insbesondere nimmt für jedes  $t \in [a, b]$  die Folge  $n \mapsto f_n(t)$  höchstens einmal einen Wert außer 0 an. Damit konvergieren die  $f_n$  sicher punktweise gegen 0. Aber wegen  $|f_n(h_n)| = 2 > 1$  und  $h_n \in M_i$  gilt dann nach Definition von  $M_i$  auf der anderen Seite  $d(f_n, 0) > 1/i$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , sodass  $n \mapsto f_n$  sicherlich bezüglich  $d$  nicht gegen 0 konvergiert. Widerspruch.  $\square$

Der Begriff der punktweisen Konvergenz lässt sich also im Gegensatz zur gleichmäßigen Konvergenz nicht durch eine Metrik fassen. Dies ist ein erstes Defizit von Metriken, das wir beheben wollen. Ein zweites ist ihre schlechte Interaktion mit Quotientenbildung, die ich auch noch kurz illustrieren möchte. Ist nämlich  $X$  ein pseudometrischer Raum und  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $X$ , so gibt es eine naheliegende Idee was stetige Abbildungen  $X/\sim \rightarrow Y$  in einen pseudometrischen Raum  $Y$  sein sollen, nämlich einfach genau die Abbildungen  $f$  für die Komposition

$$X \xrightarrow{\text{pr}} X/\sim \xrightarrow{f} Y$$

stetig ist (man beachte, dass hieraus durch Einsetzen von  $f = \text{id}: X/\sim \rightarrow X/\sim$  zumindest mal folgt, dass die Projektion selbst stetig ist). Es stellt sich die Frage, ob es eine Pseudometrik auf

$X/\sim$  gibt, die das leistet. Um einen Ansatz zu haben, erinnere ich daran, dass man den Abstand zweier Teilmengen  $A, B \subseteq X$  einfach als

$$d(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} d(a, b)$$

definiert. Es liegt also nahe die Funktion

$$\tilde{d}: X/\sim \times X/\sim \longrightarrow [0, \infty], \quad (A, B) \longmapsto d(A, B)$$

zu betrachten. Um die Probleme mit dieser Idee zu illustrieren, betrachten wir einmal den projektiven Räume aus der Geometrie. Für einen  $K$ -Vektorraum  $V$  setzt man hier

$$\mathbb{P}(V) = \{L \subseteq V \mid L \text{ ist ein 1-dimensionaler } K\text{-Untervektorraum von } V\}.$$

Diese Menge ist zwar selbst nicht ganz durch Herausteilen einer Äquivalenzrelation aus  $V$  gegeben (verschiedene Geraden sind ja sicher nicht disjunkt), aber man prüft leicht, dass die Abbildung

$$V \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}(V), \quad v \mapsto K \cdot v$$

eine Bijektion

$$(V \setminus \{0\})/\sim \longrightarrow \mathbb{P}(V),$$

liefert, wo  $v \sim w$ , wenn es ein  $\lambda \in K^\times$  gibt mit  $v = \lambda w$ . Wir wollen nun also etwa im Falle  $K = \mathbb{R}$  und  $V = \mathbb{R}^n$  die linke Seite heranziehen um  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$  eine Metrik mit der oben beschriebenen Eigenschaft zu geben.

Aber ist  $d$  die euklidische Metrik auf  $\mathbb{R}^n$  so gilt für je zwei Geraden  $L, L' \subseteq \mathbb{R}^n$  offenbar

$$d(L \setminus \{0\}, L' \setminus \{0\}) = 0.$$

Da wir hier nichts weiter als zwei beliebige Äquivalenzklassen stehen haben, folgt also, dass die Funktion

$$\tilde{d}: (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})/\sim \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})/\sim \longrightarrow [0, \infty]$$

von oben einfach verschwindet. Sie ist also zwar eine Pseudometrik, aber sicherlich hat sie nicht die gewünschte Eigenschaft, dass eine jede skalierungsinvariante Funktion  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow X$  eine bezüglich dieser Metrik stetige Abbildung  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow X$  induziert (als einfachstes Beispiel nehme man etwa  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  und betrachte die Abbildung  $\mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, x \mapsto \frac{x^2}{|x^2|}$ ).

Im konkreten Fall der reellen projektiven Räume, vermag man sich leicht aus dieser misslichen Situation zu befreien: Es liefert offenbar auch die Einschränkung

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\} \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}^n), \quad x \longmapsto \mathbb{R}x$$

eine Bijektion  $S^{n-1}/\sim \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ , wo  $x \sim y$  wenn  $x = \pm y$ , und hier liefert  $\tilde{d}$  dann eine Metrik mit allen gewünschten Eigenschaften.

Woher soll so eine Rettung im Allgemeinen aber kommen? Und es gibt auch Fälle, in denen  $\tilde{d}$  gar keine Pseudometrik mehr ist (sie werden in den Übungen einen finden müssen). Das lässt sich zwar durch einen kleinen Kniff beheben (auch dazu mehr in den Übungen), aber schlimmer noch: Es gibt Beispiele, in denen überhaupt keine Pseudometrik auf  $X/\sim$  existiert, die unserem Designkriterium genügt. Der wohl einfachste Fall ist:

**1.6. Beispiel** Man betrachte  $\mathbb{R}$  mit der euklidischen Metrik und der Relation  $x \sim y$ , falls  $x = y$  oder  $x, y \in 2\pi\mathbb{Z}$ . Die Äquivalenzklassen sind dann, die Einpunktmengen  $\{x\}$  mit  $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$  und die Menge  $2\pi\mathbb{Z}$  selbst. Die Abbildung

$$[2\pi n, 2\pi(n+1)] \longrightarrow S^1, \quad t \longmapsto (\cos(t), \sin(t))$$

faktoriert dann durch eine Bijektion  $[2\pi n, 2\pi(n+1)]/\sim \rightarrow S^1$ , und für die Umkehrabbildungen

$$e_n: S^1 \rightarrow [2\pi n, 2\pi(n+1)]/\sim \subseteq \mathbb{R}/\sim$$

sind offenbar zusammen genommen surjektiv und erfüllen  $\text{im}(e_n) \cap \text{im}(e_m) = 2\pi\mathbb{Z}$ , treffen sich also alle in einem Punkt. Man sollte sich  $\mathbb{R}/\sim$  also als Aneinanderheftung unendlich vieler Kreise an einen einzigen Punkt vorstellen.

Betrachte nun jedenfalls eine (Pseudo-)metrik  $d$  auf  $\mathbb{R}/\sim$  und die stetige Abbildung  $g_f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die durch lineare Intepolation aus

$$2\pi n \mapsto 0 \quad \text{und} \quad (2n+1)\pi \mapsto f_n$$

für irgendeine Funktion  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  entsteht. Sie ist offenbar mit  $\sim$  verträglich und induziert eine Abbildung  $\mathbb{R}/\sim \rightarrow \mathbb{R}$ . Unser Designkriterium für  $d$  sagt, dass sie alle stetig sein sollten. Sind sie aber nicht, wenn auch noch  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\sim$  stetig ist: Denn dann gibt es ja zu jedem  $n \in \mathbb{Z}$  ein  $\delta_n > 0$  derart dass

$$|x - 2\pi n| < \delta_n \implies d([x], 2\pi\mathbb{Z}) < \frac{1}{n},$$

wobei wir durch eventuelle Verkleinerung auch noch  $\delta_n < \pi$  erhalten können. Die Folge  $n \mapsto 2\pi n + \frac{\delta_n}{2}$  erfüllt dann jedenfalls  $d([2\pi n + \frac{\delta_n}{2}], 2\pi\mathbb{Z}) < \frac{1}{n}$ , sodass sie in  $\mathbb{R}/\sim$  gegen  $\mathbb{Z}$  konvergiert.

Aber wir rechnen

$$g_f\left(2\pi n + \frac{\delta_n}{2}\right) = \frac{f_{n+1}\delta_n}{2\pi}$$

Und für die spezielle Wahl von  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(n) = \begin{cases} 0 & n \leq 1 \\ \frac{2\pi}{\delta_{n-1}} & n > 1 \end{cases}$$

erhält man dann

$$g_f\left(2\pi n + \frac{\delta_n}{2}\right) = 1,$$

was sicherlich nicht gegen  $0 = g_f(\mathbb{Z})$  konvergiert.

Auch hier muss man sich also etwas neues ausdenken.

## 2. Topologische Räume

Wir suchen nun also nach einem Begriff, der Stetigkeit und Konvergenz immer noch einfängt, aber die obigen Probleme nicht teilt. Konzentrieren wir uns einmal auf die Stetigkeit; die enthält, wie sie hoffentlich wissen, den Konvergenzbegriff ja einfach: Eine Folge  $f$  in einem (pseudo-)metrischen Raum  $X$  konvergiert gegen  $x$  genau dann, wenn die Abbildung

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\} \longrightarrow X, \quad \frac{1}{n} \mapsto f_n$$

sich durch  $0 \mapsto x$  stetig ergänzen lässt.

Für die benötigten Umformulierungen erinnere ich an folgende Definition:

**2.1. Definition** Ist  $(X, d)$  ein pseudometrischer Raum, so setzen wir für  $r > 0$  und  $x \in X$

$$D_d(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\},$$

die *Kugel* um  $x$  mit Radius  $r$ . Eine Teilmenge  $U \subseteq X$  nennt man dann eine *Umgebung* von  $x$  in  $X$ , wenn es ein  $r > 0$  gibt, mit

$$D_d(x, r) \subseteq U,$$

und man definiert das *Innere*  $U^\circ$  von  $U$ , als die Menge all derjenigen Punkte von  $X$ , die von  $U$  in  $X$  umgeben werden. Weiterhin heißt  $U$  *offen*, wenn es jeden seiner Punkte in  $X$  umgibt.

Mit dieser Terminologie haben wir dann:

**2.2. Lemma** Sind  $(X, d)$  und  $(Y, e)$  pseudometrische Räume,  $f: X \rightarrow Y$  eine Abbildung und  $x \in X$  so gilt:

- (1)  $f$  ist stetig in  $x$  genau dann, wenn für jede Umgebung  $U \subseteq Y$  von  $f(x)$  auch  $f^{-1}(U) \subseteq X$  eine Umgebung von  $x$  ist.
- (2)  $f$  ist stetig (das heißt stetig in jedem Punkt von  $X$ ) genau dann, wenn  $f^{-1}U \subseteq X$  für jedes offene  $U \subseteq Y$  wieder offen ist.

Eine kleine Vorüberlegung: Für  $\epsilon, \delta > 0$  ist die Bedingung, dass für alle  $x' \in X$

$$d(x, x') < \delta \implies e(f(x), f(x')) < \epsilon$$

gelte offenbar nichts anderes als

$$f(D_d(x, \delta)) \subseteq D_e(f(x), \epsilon),$$

was wiederum zu

$$D_d(x, \delta) \subseteq f^{-1}D_e(f(x), \epsilon)$$

äquivalent ist. Die Sprache der Urbilder ist hier also nichts weiteres als eine triviale Umformulierung der üblichen Definition von Stetigkeit.

PROOF. Auch der gesamte Beweis von (1) besteht nun nur aus dem Einsetzen von Definitionen. Ist  $f$  bei  $x$  stetig und  $U \subseteq Y$  eine Umgebung von  $f(x)$ , so gibt es per Definition des Wortes Umgebung ein  $\epsilon > 0$  mit  $D_e(f(x), \epsilon) \subseteq U$ . Gemäß der Vorüberlegung finden wir dann wegen der Stetigkeit ein  $\delta > 0$  mit  $D_d(x, \delta) \subseteq f^{-1}D_e(f(x), \epsilon)$ . Aber wegen  $f^{-1}D_e(f(x), \epsilon) \subseteq f^{-1}(U)$  gilt dann sicher auch  $D_d(x, \delta) \subseteq f^{-1}(U)$ , was zeigt, dass  $f^{-1}(U)$  eine Umgebung von  $x$  ist. Und haben wir umgekehrt ein  $\epsilon > 0$  vorgegeben, so beobachten wir dass  $D_e(f(x), \epsilon)$  trivialerweise eine Umgebung von  $f(x)$  ist, und deshalb per Annahme  $f^{-1}D_e(f(x), \epsilon)$  eine Umgebung von  $x$ . Aber dann gibt es per Definition ein  $\delta > 0$  mit  $D_d(x, \delta) \subseteq f^{-1}D_e(f(x), \epsilon)$ , was laut Vorüberlegung die Stetigkeit von  $f$  bei  $x$  nachweist.

Auch die Vorwärtsimplikation von (2) hat diese Natur: Ist  $U \subseteq Y$  offen und  $x' \in f^{-1}(U)$ , so ist per Definition der Offenheit  $U$  eine Umgebung von  $f(x')$ . Aber wegen der Stetigkeit von  $f$  bei  $x$  ist nach dem ersten Punkt damit  $f^{-1}(U)$  eine Umgebung von  $x'$ . Die Menge  $f^{-1}(U)$  umgibt also jeden ihrer Punkte und ist damit offen. Man bemerke, dass wir bisher keines (!) der Axiome eine (Pseudo-)Metrik benutzt haben. Das ändert sich nun bei der Rückrichtung in (2). Sind nämlich  $x' \in X$  und  $\epsilon > 0$  gegeben, so brauchen wir erst einmal eine offene Menge, auf die sich die Voraussetzungen anwenden lassen. Hierfür wollen wir natürlich die Menge  $D_e(f(x'), \epsilon)$  selbst benutzen und deren Offenheit benutzt die Dreiecksungleichung, siehe 2.3 unten. Mit dieser Information geht der Beweis aber wieder schnell zu Ende: Per Annahme ist dann auch  $f^{-1}D_e(f(x'), \epsilon)$  offen in  $X$ , also insbesondere eine Umgebung von  $x'$  und damit existiert ein  $\delta > 0$  mit  $D_d(x', \delta) \subseteq f^{-1}D_e(f(x'), \epsilon)$ , was nach Vorüberlegung wieder genau die Stetigkeit von  $f$  bei  $x'$  nachweist.  $\square$

Holen wir noch den Nachweis der Offenheit von Kugeln nach:

**2.3. Beobachtung** Ist  $(X, d)$  ein pseudometrischer Raum, so ist für jedes  $x \in X$  und  $\epsilon > 0$  die Menge  $D_d(x, \epsilon)$  offen in  $X$ .

Ist nämlich  $y \in D_d(x, \epsilon)$  gegeben, so ist  $\epsilon - d(x, y) > 0$  und  $D_d(y, \epsilon - d(x, y)) \subseteq D_d(x, \epsilon)$ , da für alle  $z \in X$  mit  $d(y, z) < \epsilon - d(x, y)$  auch

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + \epsilon - d(x, y) = \epsilon$$

gilt.

Wir können die Stetigkeit einer Funktion gemäß 2.2 also vollständig in Termen von Umgebungen oder offenen Mengen ausdrücken.

**2.4. Bemerkung** Diese Beobachtung ist schon in der Theorie der metrischen oder normierten Räume sehr nützlich, denn sehr verschiedenartige Metriken können durchaus die gleichen offenen Mengen liefern.

- (1) Etwa tun dass alle der Normen  $x \mapsto |x|_p$  für  $p \in [1, \infty]$  auf dem  $\mathbb{R}^n$ , wie sie hoffentlich ebenfalls schonmal nachgewiesen haben und wir später verallgemeinern werden.
- (2) Allgemein ist etwa mit  $d$  auch die Funktion  $\frac{d}{1+d}$  eine (Pseudo-)Metrik auf einer Menge  $X$  wie man leicht nachrechnet, die die gleichen offenen Mengen liefert wie  $d$ . Die (Pseudo-)Metrik  $\frac{d}{1+d}$  nimmt übrigens darüber hinaus offenbar keine Werte oberhalb von 1 an. Dies ist der Grund, aus dem es für Stetigkeits- und Konvergenzüberlegungen keinen echten Unterschied macht, ob man in der Definition einer Metrik den Wert  $\infty$  erlaubt oder nicht.

In den Übungen werden sie noch einige drastischere Beispiele sehen.

Lemma 2.2 eröffnet darüber hinaus nun auch die gesuchte Möglichkeit den Begriff des metrischen Raums durch eine direkte Axiomatisierung von Umgebungen oder offenen Mengen zu ersetzen (wir wollten ja die Probleme von metrischen Räumen aus dem ersten Abschnitt lösen). Für offene Mengen ist dies etwas einfacher (obwohl historisch die, wie wir gleich sehen werden äquivalente, Definition mittels Umgebungssystemen zuerst kam): Überlegen wir jedenfalls einmal, was wir über offene Mengen in einem beliebigen pseudometrischen Raum  $(X, d)$  sagen können, so finden wir leicht (für einen Nachweis, siehe 2.6 unten):

$$\emptyset, X \text{ sind offen und}$$

sowohl beliebige Vereinigungen als auch endliche Durchschnitte offener Menge sind offen.

Man kann noch weitere allgemeine Eigenschaften finden: Zum Beispiel gibt es zu je zwei Punkten und einer offenen Menge, die genau einen der Punkte enthält, auch eine weitere offene Menge die genau den anderen enthält (diese Aussage ist wohl die erste, in die die Symmetriebedingung einer Metrik ernsthaft eingeht), und in einem echten metrischen Raum gilt offenbar auch noch, dass es zu je zwei verschiedenen Punkte disjunkte offene Menge gibt, die jeweils genau einen der Punkte enthalten, aber es hat sich als nützlich erwiesen, diese Sorte Eigenschaften separat zu behandeln (Sie werden hoffentlich zustimmen, dass diese einen etwas anderen Charakter als die obrigen besitzen). Folgende Definition ist also auf jeden Fall einen Versuch Wert:

**2.5. Definition** (Alexandrov, 1926) Ist  $X$  eine Menge, so heißt eine Teilmenge  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$  der Potenzmenge von  $X$  eine *Topologie* auf  $X$ , wenn

- (1)  $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ ,
- (2)  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{T} \implies \bigcup_{U \in \mathcal{F}} U \in \mathcal{T}$ , und
- (3)  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{T}$  endlich  $\implies \bigcap_{U \in \mathcal{F}} U \in \mathcal{T}$

gelten. Das Paar  $(X, \mathcal{T})$  heißt dann ein *topologischer Raum*. Ist  $(Y, \mathcal{S})$  ein weiterer topologischer Raum, so heißt eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  stetig, wenn für alle  $U \in \mathcal{S}$  auch  $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$  gilt. Wir bezeichnen die Menge dieser stetigen Abbildungen  $X \rightarrow Y$  mit  $C((X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{S}))$  oder wenn die Topologien aus dem Kontext klar sind (und das wird meistens der Fall sein) auch einfach mit  $C(X, Y)$ .

Natürlich reicht es anstatt der dritten Bedingung  $U, V \in \mathcal{T} \implies U \cap V \in \mathcal{T}$  zu fordern. Wir bemerken nun einmal explizit:

**2.6. Beobachtung** Ist  $d$  eine Pseudometrik auf  $X$  so ist

$$\mathcal{O}_d = \{U \subseteq X \mid U \text{ ist offen in } X \text{ bezüglich } d\}$$

eine Topologie auf  $X$  und für einen zweiten pseudometrischen Raum  $(Y, e)$  und eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  ist  $f$  stetig bezüglich der Pseudometriken  $d$  und  $e$  genau dann, wenn sie es bezüglich der Topologien  $\mathcal{O}_d$  und  $\mathcal{O}_e$  ist.

Für den ersten Punkt beobachten wir, dass die leere Menge offen ist, weil es keinen Punkt in ihr gibt, um den man etwas testen müsste und  $X$  selbst offen ist, weil jede Kugel um jeden Punkt von  $X$  natürlich wieder in  $X$  liegt. Und ist  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$  eine Familie offener Mengen, und  $x \in \bigcup_{U \in \mathcal{F}} U$ , so wählen wir uns ein  $V \in \mathcal{F}$  mit  $x \in V$ , finden dann per Definition ein  $\epsilon > 0$  mit  $D_d(x, \epsilon) \subseteq V$  und haben wegen  $V \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{F}} U$  sicherlich auch  $D_d(x, \epsilon) \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{F}} U$ . Ist letztlich  $\mathcal{F}$  eine endliche Menge von offenen Teilmengen von  $X$  und  $x \in \bigcap_{U \in \mathcal{F}} U$ , so können wir per Definition für jedes  $V \in \mathcal{F}$  ein  $\epsilon_V > 0$  wählen mit  $D_d(x, \epsilon_V) \subseteq V$ . Setzen wir dann  $\delta = \min_{V \in \mathcal{F}} \epsilon_V$  (hier benutzen wir, dass  $\mathcal{F}$  endlich ist!), so gilt sicherlich  $\delta > 0$  und per Konstruktion  $D_d(x, \delta) \subseteq D_d(x, \epsilon_V) \subseteq V$  für alle  $V \in \mathcal{F}$  und damit auch  $D_d(x, \delta) \subseteq \bigcap_{U \in \mathcal{F}} U$  wie gewünscht.

Der zweite Punkt ist dann genau der Inhalt von 2.2.

Der Begriff der Topologie ist nun der zentrale Begriff des ersten Teils der Vorlesung. Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, dass es auf  $F([a, b], \mathbb{R})$  und vielen ähnlichen Räumen nun wirklich eine Topologie der punktweisen Konvergenz gibt, und auch dass eine Topologie  $\mathcal{T}$  auf  $X$

für jede Äquivalenzrelation  $\sim$  auf  $X$  auch eine auf  $X/\sim$  induziert (die Quotiententopologie) so, dass Abbildungen  $X/\sim \rightarrow Y$  für jeden anderen topologischen Raum  $(Y, \mathcal{S})$  stetig bezüglich dieser Topologie sind genau dann wenn es ihre Komposition  $X \rightarrow X/\sim \rightarrow Y$  ist. Und selbst, wenn die Topologie auf  $X$  von der Form  $\mathcal{O}_d$  für eine Pseudometrik  $d$  auf  $X$  ist, muss die Quotiententopologie das gemäß 1.6 eben nicht mehr sein.

Bevor wir aber Beispiele geben, möchte ich noch auf die Axiomatisierung des Begriffs der Umgebung eingehen, die wie gesagt historisch der erste erfolgreiche Versuch war, das Konzept des topologischen Raumes einzufangen:

**2.7. Definition** (Hausdorff, 1914) Ein *Umgebungssystem* auf einer Menge  $X$  ist eine Abbildung  $\mathcal{N}: X \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{P}(X))$  derart, dass für jedes  $x \in X$

- (1)  $X \in \mathcal{N}_x$ ,
- (2) für alle  $U \in \mathcal{N}_x$  gilt  $x \in U$ ,
- (3) für alle  $U \in \mathcal{N}_x, U \subseteq V \subseteq X$  folgt  $V \in \mathcal{N}_x$ ,
- (4) für alle  $U, V \in \mathcal{N}_x$  gilt auch  $U \cap V \in \mathcal{N}_x$ ,
- (5) für alle  $V \in \mathcal{N}_x$  gibt es ein  $U \in \mathcal{N}_x$  so, dass für alle  $y \in U$  schon  $V \in \mathcal{N}_y$  gilt.

gelten. Ist  $(Y, \mathcal{M})$  eine weitere Menge mit einem Nachbarschaftssystem, so nennen wir  $f: X \rightarrow Y$  *stetig* bei  $x \in X$ , wenn  $f^{-1}(U) \in \mathcal{N}_x$  für alle  $U \in \mathcal{M}_x$ .

Ich hoffe Sie stimmen zu, dass hier nur das letzte Axiom etwas seltsam wirkt. Es ist in gewissen Sinne der Ersatz für die Dreiecksungleichung in der Definition einer Metrik, wie das folgende Beispiel zeigen soll:

**2.8. Beobachtung** Ist  $d$  eine Pseudometrik auf  $X$  so liefert

$$(\mathcal{U}_d)_x = \{U \subseteq X \mid U \text{ ist eine Umgebung von } x\}$$

ein Umgebungssystem  $\mathcal{U}_d$  auf  $X$ . Der Nachweis der ersten vier Axiome ist hoffentlich wieder offensichtlich und benutzt von den Axiomen einer Metrik nur  $d(x, x) = 0$  (um sicherzustellen, dass jede Umgebung von  $x$  das Element  $x$  auch wirklich enthält). Für das letzte Axiom kann man nach 2.3 etwa  $U = D_d(x, \epsilon)$  nehmen, wenn nur  $D_d(x, \epsilon) \subseteq V$  (und ein  $\epsilon > 0$  für das diese Inklusion gilt, gibt es ja gerade per Definition) und hierfür benutzt man eben genau die Dreiecksungleichung für  $d$ .

Wir werden natürlich gleich allgemein ein Analog des Inneren für Topologien und Nachbarschaftssystem definieren und ohne dieses letzte Axiom, würde der Begriff aber nun eben nicht besonders sinnvoll sein (das Innere wäre dann nicht mehr immer offen).

Man beobachte auch noch, dass 2.2 die Definition der Stetigkeit bei einem Punkt bezüglich zweier Pseudometriken genau in die Stetigkeit bezüglich der zugehörigen Umgebungssysteme übersetzt.

Nun also genug des Vorgeplänkels. Umgebungssysteme und Topologien sind äquivalente Konzepte:

**2.9. Satz** Es sei  $X$  eine Menge. Ist dann  $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{P}(X)$  eine Topologie auf  $X$ , so liefert

$$I(\mathcal{T})_x = \{U \subseteq X \mid \text{es gibt ein } V \in \mathcal{T} \text{ mit } x \in V \subseteq U\}$$

ein Umgebungssystem  $I(\mathcal{T})$  auf  $X$  und ist umgekehrt  $\mathcal{N}: X \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{P}(X))$  ein Umgebungssystem, so ist

$$C(\mathcal{N}) = \{U \subseteq X \mid \text{für alle } x \in U \text{ gibt es ein } V \in \mathcal{N}_x \text{ mit } V \subseteq U\}$$

eine Topologie auf  $X$ . Weiterhin sind die Zuordnungen  $C$  und  $I$  invers zueinander.

Und ist  $(Y, \mathcal{S})$  ein weiterer topologischer Raum, so ist eine Abbildung  $X \rightarrow Y$  bezüglich  $\mathcal{T}$  und  $\mathcal{S}$  genau dann, wenn sie für alle  $x \in X$  bezüglich  $I_{\mathcal{T}}$  und  $I_{\mathcal{S}}$  stetig ist.

PROOF. Zunächst einmal prüfen wir, dass  $I_{\mathcal{T}}$  wirklich ein Umgebungssystem ist. Gehen wir die Axiome einfach der Reihe nach durch: Sei also  $x \in X$

- (1) Um  $X \in I(\mathcal{T})_x$  zu zeigen, müssen wir eine Teilmenge  $V \in \mathcal{T}$  finden mit  $x \in V \subseteq X$ . Gemäß dem ersten Axiom einer Topologie tut  $X$  das gewünschte.

- (2) Dass für jedes  $U \in \mathcal{I}(\mathcal{T})_x$  schon  $x \in U$  gilt, folgt direkt aus der Definition.
- (3) Dass für jedes  $U \in \mathcal{I}(\mathcal{T})_x$  und  $U \subset W \subseteq X$  auch  $W \in \mathcal{I}(\mathcal{T})_x$  gilt ist auch offensichtlich: Per Definition gibt es ja ein  $V \in \mathcal{T}$  mit  $x \in V \subseteq U$  und dann gilt sicherlich auch  $x \in V \subseteq W$ , was per Definition das gewünschte impliziert.
- (4) Dass  $\mathcal{I}(\mathcal{T})_x$  stabil unter (endlichen) Durchschnitten ist, folgt sofort aus dem analogen Fakt für Topologien, dem dritten Axiom.
- (5) Ist  $V \in \mathcal{I}(\mathcal{T})_x$  gegeben, so müssen wir ein  $U \in \mathcal{I}(\mathcal{T})_x$  finden, sodass für alle  $y \in U$  schon  $V \in \mathcal{I}(\mathcal{T})_y$  gilt. Aber per Definition gibt es ein  $U \in \mathcal{T}$  mit  $x \in U \subseteq V$ . Ich behaupte nun, dass dieses  $U$  auch die gewünschte Eigenschaft hat: Denn ist  $y \in U$ , dann gilt schließlich  $y \in U \subseteq V$  und das zeigt  $V \in \mathcal{I}(\mathcal{T})_y$ .

Man beachte, dass wir das zweite Axiom einer Topologie hier nicht verwendet haben! Als nächstes weisen wir nach, dass  $\mathcal{C}(\mathcal{N})$  wirklich eine Topologie ist:

- (1) Dass  $\emptyset \in \mathcal{C}(\mathcal{N})$  ist hoffentlich klar. Um  $X \in \mathcal{C}(\mathcal{N})$  einzusehen, müssen wir für jedes  $x \in X$  ein  $U \in \mathcal{N}_x$  finden mit  $U \subseteq X$ . Aber gemäß erstem Axiom eines Umgebungssystems, kann man hierfür einfach  $U = X$  nehmen.
- (2) Ist  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{N})$  und  $x \in \bigcup_{U \in \mathcal{F}} U$ , so müssen wir ein  $V \in \mathcal{N}_x$  finden mit  $V \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{F}} U$ . Hierzu können wir aber einfach  $U' \in \mathcal{F}$  hernehmen mit  $x \in U'$ , dann gibt es wegen  $U' \in \mathcal{C}(\mathcal{N})$  ein  $V \in \mathcal{N}_x$  mit  $V \subseteq U'$  und dann gilt sicherlich auch  $V \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{F}} U$ .
- (3) Dass  $\mathcal{C}(\mathcal{N})$  abgeschlossen unter endlichen Durchschnitten ist, folgt sofort aus dem analogen Fakt für Umgebungssysteme, dem vierten Axiom.

Man beachte wieder, dass wir nur das erste und vierte Axiom eines Umgebungssystems benutzt haben! Nun der Nachweis dass I und C invers sind.

- (1)  $\mathcal{C}(\mathcal{I}(\mathcal{T})) \subseteq \mathcal{T}$ : Nehmen wir uns ein  $U \in \mathcal{C}(\mathcal{I}(\mathcal{T}))$  her. Wir behaupten, dass dann

$$U = \bigcup_{W \in \mathcal{T}, x \in W \subseteq U} W,$$

wobei die rechte Seite wegen dem zweiten Axiom einer Topologie sicherlich in  $\mathcal{T}$  liegt. Per Konstruktion ist sicherlich die rechte Seite in der linken enthalten. Und ist andersherum  $x \in U$ , so gibt es nach Definition ein  $V \in \mathcal{I}(\mathcal{T})_x$  mit  $V \subseteq U$ . Aber wieder nach Definition gibt es dann ein  $W \in \mathcal{T}$  mit  $x \in W \subseteq V$ . Und damit gilt sicher auch  $x \in W \subseteq U$ , was zeigt, dass  $x$  in der rechten Seite liegt.

- (2)  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{I}(\mathcal{T}))$ : Ist  $U \in \mathcal{T}$  und  $x \in U$ , so gilt  $U \in \mathcal{I}(\mathcal{T})_x$ , bezeugt von  $x \in U \subseteq U$ . Aber das sagt per Definition genau  $U \in \mathcal{C}(\mathcal{I}(\mathcal{T}))$ .
- (3)  $\mathcal{I}(\mathcal{C}(\mathcal{N}))_x \subseteq \mathcal{N}_x$ : Sei also  $U \in \mathcal{I}(\mathcal{C}(\mathcal{N}))_x$ . Das heißt es gibt ein  $V \in \mathcal{C}(\mathcal{N})$  mit  $x \in V \subseteq U$  und das wiederum heißt, dass es für jedes  $y \in V$  ein  $W \in \mathcal{N}_y$  gibt mit  $W \subseteq V$ . Insbesondere gibt es so ein  $W$  für  $x$ , also ein  $W \in \mathcal{N}_x$  mit  $W \subseteq V$ . Aber damit gilt auch  $W \subseteq U$  und  $x \in W$  folgt aus dem ersten Axiom eines Umgebungssystems. Aus dem dritten folgt dann  $U \in \mathcal{N}_x$  wie gewünscht.
- (4)  $\mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{C}(\mathcal{N}))_x$ : Bisher haben wir das etwas seltsame fünfte Axiom eines Umgebungssystems noch nirgends verwendet. Das ändert sich nun. Nehmen wir uns nämlich ein  $V \in \mathcal{N}_x$  her. Wir müssen ein  $U \in \mathcal{C}(\mathcal{N})$  finden mit  $x \in U \subseteq V$ . Hierfür wählen wir

$$U = \{y \in V \mid V \in \mathcal{N}_y\}.$$

Dann gilt sicherlich per Annahme  $x \in U$  und trivialerweise  $U \subseteq V$ . Bleibt noch  $U \in \mathcal{C}(\mathcal{N})$  zu zeigen, mit anderen Worten, dass es für jedes  $y \in U$  ein  $W \in \mathcal{N}_y$  mit  $W \subseteq U$  gibt. Aber das letzte Axiom eines Umgebungssystems (angewendet auf  $V$ ) liefert ja sogar für jedes  $y \in U$  (ja sogar für jedes  $y \in V$ ) ein  $W \in \mathcal{N}_y$  derart, dass für alle  $z \in W$  schon  $V \in \mathcal{N}_z$  gilt. Aus dem ersten Axiom eines Umgebungssystems folgt dann  $W \subseteq V$  und damit per Definition von  $U$  auch  $W \subseteq U$  wie gewünscht.

Bleibt noch die Aussage über die Stetigkeit zu zeigen. Sei also  $f: X \rightarrow Y$  stetig bezüglich  $\mathcal{T}$  und  $\mathcal{S}$  und  $x \in X$ . Ist dann  $U \in \mathcal{I}(\mathcal{S})_{f(x)}$  so müssen wir  $f^{-1}(U) \in \mathcal{I}(\mathcal{T})_x$  zeigen, also dass es ein  $W \in \mathcal{T}$  gibt  $x \in W \subseteq f^{-1}(U)$ . Aber per Annahme gibt es ja ein  $V \in \mathcal{S}$  mit  $f(x) \in V \subseteq U$  und  $W = f^{-1}(V)$  tut dann per Annahme an  $f$  das gewünschte.

Und ist andersherum  $f$  stetig bezüglich  $I(\mathcal{T})$  und  $I(\mathcal{S})$  und  $U \in \mathcal{S}$ , so müssen wir  $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$  nachweisen. Ich behaupte

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{V \in \mathcal{T}, V \subseteq f^{-1}(U)} V.$$

Die rechte Seite liegt sicherlich nach zweiten Axiom einer Topologie in  $\mathcal{T}$ .

Dass die rechte in der linken Seite liegt ist hoffentlich klar. Und ist umgekehrt  $x \in f^{-1}(U)$ , so gilt  $U \in I(\mathcal{S})_{f(x)}$  und damit per Annahme  $f^{-1}(U) \in I(\mathcal{T})_x$ . Das bedeutet wiederum, dass es ein  $V \in \mathcal{T}$  gibt mit  $x \in V \subseteq f^{-1}(U)$ , und damit liegt in  $x$  in der rechten Seite.

Uff, so viele Mengen. □

Wir übertragen nun noch etwas Terminologie von metrischen Räumen, dann folgen Beispiele.

**2.10. Definition** Ist  $\mathcal{T}$  eine Topologie auf  $X$ , so nennen wir eine Teilmenge  $M \subseteq X$  *offen* genau dann, wenn  $U \in \mathcal{T}$  gilt und *abgeschlossen*, wenn  $X \setminus U \in \mathcal{T}$ . Die Menge  $M$  heißt eine *Umgebung* von  $x \in X$ , wenn es eine offene Menge  $V \subseteq X$  gibt mit  $x \in V \subseteq M$ . Das *Innere* von  $M$ , geschrieben als  $\text{Int}(M)$  oder  $M^\circ$  ist die Menge aller Punkte von  $X$ , die von  $M$  umgeben werden, das *Äußere* von  $M$ , geschrieben  $\text{Ext}(M)$ , ist die Menge aller Punkte von  $X$ , die von  $X \setminus M$  umgeben werden und der *Rand* von  $M$ , geschrieben  $\partial M$  besteht aus allen übrigen Punkten. Zuletzt heißt  $\overline{M} = M \cup \partial M$  der *Abschluss* von  $M$ .

Ein paar einfache Eigenschaften, deren Nachweis ich als Fingerübung einmal Ihnen überlasse.

**2.11. Beobachtung** Ist  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum so gelten folgende Aussagen für jedes  $M \subseteq X$ :

- (1)  $\emptyset$  und  $X$  sind abgeschlossen,
- (2) endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen,
- (3) beliebige Schnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen,
- (4) Es ist

$$M^\circ = \{x \in M \mid \text{es gibt ein offenes } V \subseteq X \text{ mit } x \in V \subseteq M\} = \bigcup_{V \subseteq M \text{ offen}} V$$

die größte offene Menge, die in  $M$  enthalten ist, und analog

$$\overline{M} = \{x \in X \mid \text{jedes offene } V \subseteq X \text{ mit } x \in V \text{ hat } V \cap M \neq \emptyset\} = \bigcap_{M \subseteq A \text{ abgeschlossen}} A$$

die kleinste abgeschlossene Menge, in der  $M$  enthalten ist.

- (5) Es gelten

$$\partial M = \overline{M} \setminus M^\circ, \quad M^\circ = \overline{M} \setminus \partial M, \quad \text{und} \quad \overline{M} = M^\circ \cup \partial M.$$

Zum Abschluss bemerke ich auch noch, dass die Komposition je zweier stetiger Abbildungen zwischen topologischen Räumen trivialerweise wieder stetig ist, sowohl absolut, also auch wenn es um die Stetigkeit an einzelnen Punkten geht. Und noch der offensichtliche Begriff der Isomorphie für topologische Räume:

**2.12. Definition** Sind  $(X, \mathcal{T})$  und  $(Y, \mathcal{S})$  topologische Räume, so heißt eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  ein *Homöomorphismus* bezüglich der Topologien  $\mathcal{T}$  und  $\mathcal{S}$ , wenn  $f$  bijektiv ist und  $U \in \mathcal{T}$  genau dann, wenn  $f(U) \in \mathcal{S}$ .

Man beachte, dass die zweite Bedingung genau sagt, dass sowohl  $f$  als auch  $f^{-1}$  stetig sind.

### 3. Beispiele und Konstruktionen topologischer Räume

Wir fangen mit einfachen Beispielen an, und bewegen uns dann nach und nach zu immer interessanteren. Zuerst die sehr langweiligen:

**3.1. Beispiel** (1) Für jede Menge  $X$  ist  $\{\emptyset, X\}$  offenbar eine Topologie auf  $X$ , die *indiskrete* Topologie. Sie wird offenbar von der trivialen Pseudometrik  $0: X \times X \rightarrow [0, \infty]$  induziert. Für  $M \subseteq X$  gilt

$$\overline{M} = \begin{cases} X & M \neq \emptyset \\ \emptyset & M = \emptyset \end{cases}, \quad M^\circ = \begin{cases} \emptyset & M \neq X \\ X & M = X \end{cases} \quad \text{und} \quad \partial M = \begin{cases} \emptyset & M = \emptyset, X \\ X & \text{sonst} \end{cases}$$

und für jeden topologischen Raum  $(Y, \mathcal{T})$  ist jede Abbildung  $f: Y \rightarrow X$  stetig bezüglich der indiskreten Topologie.

(2) Für jede Menge  $X$  ist  $\mathcal{P}(X)$  offenbar eine Topologie auf  $X$ , die *diskrete* Topologie. Sie wird offenbar von der Metrik

$$X \times X \rightarrow [0, \infty], \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

induziert. Für  $M \subseteq X$  gilt

$$\overline{M} = M = M^\circ \quad \text{und} \quad \partial M = \emptyset$$

und für jeden topologischen Raum  $(Y, \mathcal{T})$  ist jede Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  stetig bezüglich der diskreten Topologie.

Als nächstes einige Beispiele die illustrieren, wie viel mehr Topologien denn Metriken es gibt:

**3.2. Beispiel** (1) Ist  $X = \{0, 1\}$  so ist  $\{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$  eine Topologie, die den sogenannten *Sierpinski-Raum*  $\mathfrak{S}$  liefert. Dies ist das wohl einfachste Beispiel einer Topologie die nicht von einer Pseudometrik induziert wird: Für eine jede Pseudometrik  $d$  auf  $\{0, 1\}$  gilt schließlich

$$d(0, 0) = 0, \quad d(1, 1) = 0 \quad \text{und} \quad d(0, 1) = d(1, 0),$$

und wenn dieser letzte Wert auch 0 ist induziert  $d$  die indiskrete Topologie, und wenn er ungleich 0 ist die diskrete, welche sich beide von der Sierpinski-Topologie unterscheiden. Stetige Abbildungen in den Sierpinski-Raum sind übrigens das gleiche wie offene Mengen, in dem Sinne, dass für jeden topologischen Raum  $(Y, \mathcal{S})$  die Abbildung

$$C(Y, \mathfrak{S}) \rightarrow \mathcal{S}, \quad f \mapsto f^{-1}(1)$$

offenbar bijektiv ist.

(2) Ist  $\leq$  eine transitive und symmetrische Relation auf  $X$ , so nennen wir eine Menge  $M \subseteq X$  *nach oben abgeschlossen*, wenn für alle  $m \in M$  und  $x \in X$  aus  $m \leq x$  immer schon  $x \in M$  folgt. Als Übung werden Sie verifizieren müssen, dass die nach oben abgeschlossenen Teilmengen von  $X$  eine Topologie  $\mathfrak{A}_{\leq}$  auf  $X$  bilden, sie heißt die *Alexandrov-Topologie* oder auch *Ordnungstopologie*, und dass eine Abbildung bezüglich zweier Alexandrov-Topologien stetig genau dann ist, wenn sie monoton bezüglich der definierenden Relationen ist. Als Beispiel trägt der Sierpinski-Raum oben die Alexandrov-Topologie bezüglich der offensichtlichen Relation mit  $0 < 1$ . Die Alexandrov-Topologie auf  $\mathbb{R}$  (bezüglich der üblichen Ordnung) hat als offene Mengen genau

$$[a, \infty[, \quad ]a, \infty[, \quad \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \emptyset$$

für beliebiges  $a \in \mathbb{R}$ . Sie ist also sehr verschieden von der euklidischen Topologie. Für eine Äquivalenzrelation  $\sim$  besteht  $\mathfrak{A}_{\sim}$  genau aus beliebigen Vereinigungen von Äquivalenzklassen. Insbesondere reproduziert  $\mathfrak{A}_{\sim}$  noch einmal die diskrete Topologie und  $\mathfrak{A}_{\text{triv}}$  die indiskrete, wo  $\text{triv}$  die triviale Relation bezeichnet, bei der je zwei Elemente in Relation stehen.

Alexandrov-Topologien haben die Eigenschaft, dass *beliebige* Schnitte offener Mengen wieder offen sind und ebenfalls in den Übungen werden sie zeigen müssen, dass dies sie in der Tat vollständig charakterisiert im Sinne, dass die Abbildung

$$\mathfrak{A}: \{R \subseteq X \times X \mid \begin{matrix} R \text{ ist transitiv} \\ \text{und reflexiv} \end{matrix}\} \longrightarrow \left\{ \mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X) \mid \begin{matrix} \mathcal{T} \text{ ist eine Topologie in der beliebige} \\ \text{Durchschnitte offener Mengen offen sind} \end{matrix} \right\}$$

für jede Menge  $X$  bijektiv ist. In gewissen Sinne enthält das Studium topologischer Räume also die gesamte Ordnungstheorie.

- (3) Für jede Menge  $X$  ist  $\{U \subseteq X \mid X \setminus U \text{ endlich}\} \cup \{\emptyset\}$  offenbar eine Topologie von  $X$ , die *coendliche Topologie* (die de Morgan'schen Regeln übersetzen das einfach in die Tatsache, dass endlich Vereinigungen und beliebige Durchschnitte endlicher Mengen wieder endlich sind). Ist  $X$  selbst endlich ist das natürlich auch wieder nur die diskrete Topologie, aber für unendliches  $X$  ist es eine recht seltsame. Etwa haben wir für  $M \subseteq X$

$$\overline{M} = \begin{cases} M & M \text{ endlich} \\ X & \text{sonst} \end{cases}, \quad M^\circ = \begin{cases} M & X \setminus M \text{ endlich} \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{und } \partial M = \begin{cases} \emptyset & M \text{ und } X \setminus M \text{ endlich} \\ M & M \text{ endlich, } X \setminus M \text{ unendlich} \\ X \setminus M & M \text{ unendlich, } X \setminus M \text{ endlich} \\ X & M \text{ und } X \setminus M \text{ unendlich} \end{cases}$$

Ganz analog hat gibt es auch die *coabzählbare Topologie* (und natürlich funktioniert das ganze sogar für eine beliebige unendliche Kardinalzahl).

Als nächstes Beispiel einige interessante Topologien, mit denen wir uns aber in der Vorlesung nicht weiter beschäftigen werden:

**3.3. Beispiel** (1) Ist  $M$  ein  $R$ -Modul und

$$0 \subseteq \dots \subseteq F_{i-1} \subseteq F_i \subseteq F_{i+1} \subseteq \dots \subseteq M,$$

eine Filtrierung durch  $R$ -Untermoduln, so ist

$$\{U \subseteq M \mid \text{für alle } x \in U \text{ gibt es ein } i \in \mathbb{Z} \text{ mit } x + F_i \subseteq U\}$$

eine Topologie auf  $M$ , die sogenannte  *$F$ -adische Topologie*. Etwa kann man für ein Ideal  $I \subseteq R$  die  *$I$ -adische Filtrierung*

$$0 \subseteq \dots \subseteq I^{i+1} \cdot M \subseteq I^i \cdot M \subseteq I^{i-1} \cdot M \subseteq \dots \subseteq M,$$

und damit die  $I$ -adische Topologie betrachten. Prominentestes Beispiel ist die  $p$ -adische Filtrierung auf einer abelschen Gruppe (also einem  $\mathbb{Z}$ -Modul), bei der man einfach  $I = (p)$  für eine Primzahl  $p$  wählt. Selbst für  $M = \mathbb{Z}$  ist diese nicht diskret: Die Folge  $i \mapsto p^i$  konvergiert gegen 0!

- (2) Ist  $K$  ein Körper so kann man  $K^n$  mit der *Zariski-Topologie*

$$\mathfrak{Z}_K^n = \left\{ U \subseteq K^n \mid \text{Es gibt } S \subseteq K[T_1, \dots, T_n] \text{ derart, dass } K^n \setminus U = V(S) \right\},$$

versehen, wo  $V(S) = \{x \in K^n \mid F(x) = 0 \text{ für alle } F \in S\}$ . Dass dies wirklich eine Topologie ist, folgt aus

$$\emptyset = V(1), \quad K^n = V(0), \quad V(S) \cup V(R) = V(R \cdot S) \quad \text{und} \quad \bigcap_{S \in \mathcal{F}} V(S) = V\left(\bigcup_{S \in \mathcal{F}} S\right),$$

welche man allesamt leicht verifiziert, durch Komplementbildung (die dritte Gleichung benutzt die Nullteilerfreiheit von  $K$ !). Sie spielt in der algebraischen Geometrie eine große Rolle, so kodiert sie doch in ihren abgeschlossenen Menge gerade welche Teilmengen des  $K^n$  als gemeinsame Nullstellenmengen von Ansammlungen von Polynomen vorkommen (der sogenannte *Verschwindungsort*, daher das  $V$ ). Per Konstruktion sind polynomielle Abbildungen  $K^n \rightarrow K^m$  stetig bezüglich der Zariski-Topologien.

Zum Beispiel sagt der (nicht ganz triviale!) Fakt, dass jedes Polynom in einer Variable nur endlich viele Nullstellen hat (euklidischer Algorithmus!) und es zu jeder endlichen Menge  $A$  auch wirklich ein Polynom gibt (nämlich  $\prod_{a \in A} T - a$ ) das genau bei  $A$  verschwindet, genau dass  $\mathfrak{Z}_K^1$  einfach die coendliche Topologie auf  $K$  ist. Ist  $K$  endlich, so liefert ein ganz ähnliches Argument natürlich wieder, dass  $\mathfrak{Z}_K^n$  einfach die

diskrete Topologie ist. Allgemein ist aber schon die eine ernsthafte Bestimmung  $\mathfrak{Z}_K^2$  sehr schwer: Neben allen endlichen Mengen und  $K^2$  sind die abgeschlossenen Teilmengen von  $K^2$  (nach einem kleinen Satz über Polynomringe) genau endlichen Vereinigungen ebener algebraischer Kurven. Die Topologie  $\mathfrak{Z}_K^2$  zu verstehen, läuft also genau auf deren Klassifikation hinaus und schon das ist ein schweres Problem, über das ich hier nichts weiter sagen werde.

Wir beobachten aber noch, dass die Zariski-Topologie auf dem  $\mathbb{R}^n$  von der euklidischen sehr verschieden ist: Jede Zariski abgeschlossene Menge ist natürlich (als Schnitt von Nullstellenmengen stetiger Funktionen) euklidisch abgeschlossen, aber die Umkehrung ist ja schon für  $n = 1$  falsch. Und in der Tat, mit etwas algebraischem Wissen (das Stichwort ist Krulldimension), zeigt man dass der Zariski-Abschluss einer jeden euklidischen Kugel ganz  $\mathbb{R}^n$  ist.

- (3) Analoge Konstruktionen kann man anstatt mit Polynomen (bzw. polynomiellen Funktionen auf dem  $K^n$ ) auch mit einem beliebigen Unterring  $R \subseteq F(X, K)$  für eine beliebige Menge  $X$  durchführen. Zum Beispiel kann man für  $K = \mathbb{R}$  und  $X = \mathbb{R}^n$  die stetigen oder glatten Abbildungen nehmen und erhält zwei weitere Topologien auf  $\mathbb{R}^n$ . Diese sind aber gar nicht exotisch: Es ist ein Satz von Whitney aus den 1940'ern, dass es zu jeder (euklidisch!) abgeschlossenen Teilmenge  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  eine glatte Funktion  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, die genau auf  $A$  verschwindet. Vielleicht werden wir das später beweisen, wenn Zeit ist. Jedenfalls, stimmen das stetige und glatte Analog der Zariski-Topologie auf dem  $\mathbb{R}^n$  einfach mit der euklidischen überein.
- (4) Für  $K = \mathbb{C}$  bieten sich auch noch die holomorphen Abbildungen  $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  als eine Wahl von  $R$  an. Die zugehörige Topologie liegt dann strikt zwischen der Zariski- und der euklidischen Topologie auf  $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ , und ihre Bestimmung übersetzt sich wieder in grundlegende Fragen der komplexen Geometrie; wieder gilt aber etwa, dass der Abschluss jeder euklidischen Kugel ganz  $\mathbb{C}^n$  ist (Stichwort: Identitätsprinzip). Den Fall  $n = 1$  behandelt man aber häufig direkt in der ersten Funktionentheorievorlesung: Der Weierstraß'sche Produktsatz, den man dort beweisen kann, besagt nämlich, dass eine Teilmenge von  $A \subseteq \mathbb{C}$  als Nullstellenmenge einer holomorphen Funktion ungleich 0 genau dann auftaucht, wenn  $A$  abgeschlossen bezüglich der euklidischen Topologie ist und es um jeden Punkt von  $a$  eine Scheibe gibt, die keinen weiteren Punkt aus  $A$  enthält (in der Terminologie von 3.4 unten, sagt das genau, dass die euklidische Teilraumtopologie von  $A$  diskret ist). Da solche Teilmenge stabil unter Durchschnitten und endlichen Vereinigungen sind, bilden sie zusammen mit ganz  $\mathbb{C}$  genau die abgeschlossenen Teilmengen der holomorphen Zariski-Topologie auf  $\mathbb{C}$ .

Nun die ersten Beispiel, die wir von nun an vermehrt benutzen werden:

**3.4. Konstruktion** Ist  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $M \subseteq X$  eine Teilmenge, so soll  $M$  natürlich eine Topologie erben. Das Analog bei metrischen Räumen ist so offensichtlich, dass man es meist nicht einmal ausspricht: Ist  $d: X \times X \rightarrow [0, \infty]$  eine (Pseudo-)Metrik auf  $X$ , so ist die Einschränkung von  $d$  auf  $M \times M$  eine (Pseudo-)Metrik auf  $M$ . Zack, fertig. Bei topologischen Räumen ist nun aber etwas zu tun! Und der vielleicht offensichtlichste Versuch, nämlich  $\{U \subseteq M \mid U \in \mathcal{T}\}$  geht auch direkt schief: Diese Menge ist eine Topologie auf  $M$  sicherlich nur dann, wenn  $M$  selbst offen in  $X$  ist (sonst ist  $M$  mit dieser Definition ja nicht offen in sich selbst, was ja aber eins der Axiome einer Topologie ist!). So sehen offene Mengen aber für die Einschränkung einer Metrik auch gar nicht aus: Offene Kugeln in  $M$  sind ja nicht offene Kugeln in  $X$ , die in ganz in  $M$  leben, sondern Schnitte von offenen Kugeln in  $X$  mit  $M$ . Man betrachtet also stattdessen

$$\{U \subseteq M \mid \text{es gibt ein } V \in \mathcal{T} \text{ mit } U = V \cap M\},$$

das ist die *Teilraumtopologie*. Anstatt das direkt zu verifizieren, beobachten wir noch, dass man diese Sorte Topologie unmittelbar etwas verallgemeinern kann: Ist  $f: Y \rightarrow X$  eine Abbildung so kann man analog

$$f^*\mathcal{T} = \{U \subseteq Y \mid \text{es gibt ein } V \in \mathcal{T} \text{ mit } U = f^{-1}(V)\},$$

betrachten, die unter  $f$  von  $\mathcal{T}$  zurückgezogene Topologie; für  $f$  die Inklusion einer Teilmenge  $M$  erhalten wir offenbar die Teilmengentopologie.

Hier sind nun einige Behauptungen, die Sie in den Übungen nachweisen müssen:

- (1) Dies ist wirklich eine Topologie, und zwar die kleinste bezüglich derer  $f$  stetig ist,
- (2) für jeden topologischen Raum  $(Z, \mathcal{S})$  ist eine Abbildung  $g: Z \rightarrow Y$  stetig bezüglich  $f^*\mathcal{T}$  ist genau dann, wenn die Komposition

$$Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$$

dies bezüglich  $\mathcal{T}$  ist, und

- (3) für eine Pseudometrik hat man wirklich  $f^*\mathcal{O}_d = \mathcal{O}_{f^*d}$ , wobei  $f^*d = d \circ (f \times f)$  die induzierte Pseudometrik ist.

Die zweite Aussage ist beim Einschränken von Metriken auf Teilmengen derart offensichtlich, dass ich mir vorstellen könnte, dass Sie sie noch nie explizit formuliert haben (oder haben Sie sich schonmal gefragt, ob für irgendeine Abbildung  $f$  eigentlich die Stetigkeit davon abhängt, ob man sie als Abbildung  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  oder  $\mathbb{R}^n \rightarrow \text{im}(f)$  auffasst?).

Außer zu Teilräumen überzugehen, können wir nun auch etwa  $\mathbb{R}^2$  die von der euklidischen Topologie entlang der Projektion  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x$  zurückgezogene Topologie geben. Ihre offenen Menge sind genau die der Form  $U \times \mathbb{R}$ , wo  $U \subseteq \mathbb{R}$  offen ist. Nach der Klassifikation der offenen Mengen in  $\mathbb{R}$  sind diese Mengen also genau beliebige Vereinigungen von offenen vertikalen Streifen der Form  $]a, b[ \times \mathbb{R}$ , eine durchaus etwas seltsame Topologie. Diese Sorte Streifentopologie ist natürlich wieder erstmal nicht interessant, sondern dient nur der Illustration.

Wir notieren eine Eigenschaft, die bei Topologien offensichtlich ist, aber bei Metrik vielleicht nicht ganz: Topologien sind in offensichtlicher Weise geordnet.

**3.5. Definition** Ist  $X$  eine Menge und  $\mathcal{S}, \mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$  Topologien so heißt  $\mathcal{S}$  gröber als  $\mathcal{T}$  und  $\mathcal{T}$  feiner als  $\mathcal{S}$ , wenn  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ .

- 3.6. Beispiel**
- (1) In der Sprache der induzierten Topologien ist eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  genau dann stetig bezüglich einer Topologie  $\mathcal{T}$  auf  $X$  und einer Topologie  $\mathcal{S}$  auf  $Y$ , wenn  $\mathcal{T}$  feiner ist also  $f^*\mathcal{S}$ . Insbesondere ist  $\mathcal{T}'$  gröber als  $\mathcal{T}$  dann und nur dann, wenn die Identität von  $X$  als Abbildung  $(X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T}')$  stetig ist.
  - (2) Auf dem  $\mathbb{R}^2$  haben wir nun also etwa die sechs Topologien

$$\text{diskret} \subset \text{coendlich} \subset \text{Zariski} \subset \text{holomorph} \subset \text{euklidisch} \subset \text{indiskret},$$

eine Kette von fünf echten Verfeinerungen. Die coabzählbare Topologie ist (wie jede Topologie) feiner als die diskrete und gröber als die indiskrete, und natürlich auch feiner als die koendliche, aber mit den anderen drei Topologien hier ist sie nicht vergleichbar, und wenn wir  $\mathbb{R}^2$  lexikographisch ordnen, haben wir auch noch die Alexandrov-Topologie zu Verfügung. Wie vergleicht diese sich mit den anderen?

- (3) Sind  $d$  und  $d'$  Pseudometriken mit  $d(x, y) \leq d'(x, y)$  so folgt leicht, dass  $\mathcal{O}_d$  gröber als  $\mathcal{O}_{d'}$ , aber allein schon weil verschiedenste Metrik die gleich Topologie induzieren, passiert das noch viel öfter (und etwas unkontrollierbar).

Diese harmlos scheinende Beobachtung erlaubt uns nun eine viel flexiblere Konstruktion interessanter Topologien. Zunächst einige Beobachtungen:

**3.7. Lemma** Ist  $X$  eine Menge und  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$  eine Familie von Topologien auf  $X$ , so ist auch  $\bigcap_{\mathcal{T} \in \mathcal{F}} \mathcal{T}$  eine Topologie auf  $X$ .

Insbesondere gibt es zu jedem  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$  eine gröbste Topologie  $\langle \mathcal{B} \rangle$ , die  $\mathcal{B}$  enthält. Es gilt dann  $U \in \langle \mathcal{B} \rangle$ , wenn eine Familie  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{B}^\circ$  existiert, mit  $U = \bigcup_{U \in \mathcal{G}} U$ , wobei

$$\mathcal{B}^\circ = \left\{ U \subseteq X \mid \text{es existiert eine endliche Menge } \mathcal{H} \subseteq \mathcal{B} \text{ mit } U = \bigcap_{B \in \mathcal{H}} B \right\}$$

Mit anderen Worten: Die offenen Mengen in  $\langle \mathcal{B} \rangle$  sind gerade beliebige Vereinigungen von endlichen Durchschnitten in  $\mathcal{B}$ .

PROOF. Die erste Behauptung ist hoffentlich klar, und für die zweite setze man einfach

$$\langle \mathcal{B} \rangle = \bigcap_{\substack{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X) \\ \mathcal{T} \text{ Topologie}}} \mathcal{T};$$

man beachte nur, dass die Indexmenge nicht leer ist, weil  $\mathcal{P}(X)$  selbst eine Topologie ist die  $\mathcal{B}$  enthält.

Für die letzte beobachten wir zuerst, dass sicherlich  $\mathcal{B}^\cap \subseteq \langle \mathcal{B} \rangle$  gilt, da jede Topologie abgeschlossen unter endlichen Schnitten ist. Aber damit enthält  $\langle \mathcal{B} \rangle$  auch beliebige Vereinigungen von Mengen aus  $\mathcal{B}^\cap$ , sodass die beschriebenen Mengen zumindest schonmal alle offen sind. Und umgekehrt prüft man leicht, dass sie wirklich eine Topologie bilden: Es gilt sicherlich schon  $X = \bigcap_{U \in \mathcal{B}^\cap} U \in \mathcal{B}^\cap$  (leerer Durchschnitt), und damit ist  $X$  die Vereinigung der einelementigen Familie  $\{X\}$  in  $\mathcal{B}^\cap$  und analog gilt  $\emptyset = \bigcup_{U \in \mathcal{B}^\cap} U$ , was ebenfalls von der gewünschten Form ist. Und offenbar sind die beschriebenen Mengen stabil unter beliebigen Vereinigungen, da Vereinigungen von Vereinigungen wieder Vereinigungen sind; genauer gilt ja

$$\bigcup_{K \in L} \bigcup_{M \in K} M = \bigcup_{M \in K \in L} M.$$

Und die Stabilität unter endlichen Durchschnitten folgt, weil mit analogem Argument  $\mathcal{B}^\cap$  stabil unter endlichen Durchschnitten ist, und dann die de Morgan'sche Regel zuschlägt:

$$\bigcup_{U \in \mathcal{G}} U \cap \bigcup_{V \in \mathcal{G}'} V = \bigcup_{(U, V) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G}'} U \cap V.$$

Aber da  $\langle \mathcal{B} \rangle$  die kleinste Topologie ist, die  $\mathcal{B}$  muss sie damit in der Ansammlung der beschriebenen Mengen enthalten sein.  $\square$

**3.8. Definition** Man sagt eine Menge  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$  ist eine *Subbasis* einer Topologie  $\mathcal{T}$  auf  $X$ , wenn  $\langle \mathcal{B} \rangle = \mathcal{T}$ . Eine Subbasis heißt *Basis*, falls jeder Durchschnitt  $B \cap B'$  für  $B, B' \in \mathcal{B}$  selbst wieder eine Vereinigung von Mengen in  $\mathcal{B}$  ist.

Eine Subbasis sollte nach Fug und Recht also wohl besser ein Erzeugendensystem einer Topologie heißen, tut es aber aus historischen Gründen nicht. Und der (weniger wichtige!) Begriff der Basis entbehrt wohl jeder Analogie zur linearen Algebra. Sein Sinn und Zweck ist es, die Beschreibung der erzeugten Topologie zu vereinfachen: Eine Menge  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$  ist Basis der Topologie  $\mathcal{T}$  genau dann ist, wenn jede Menge in  $\mathcal{T}$  sich als Vereinigung von offenen Mengen in  $\mathcal{B}$  schreiben lässt; ich hoffe das ist nach obigem Lemma klar.

**3.9. Beispiel** (1) Die offenen Kugeln  $D_d(x, r)$  mit  $x \in X$  und  $r > 0$  bilden im wesentlichen per Definition eine Basis der Topologie  $\mathcal{O}_d$  für jede Pseudometrik  $d$  auf einer Menge  $X$ .  
 (2) Zusammengenommen bilden die vertikalen und horizontalen Streifen (also die  $]a, b[ \times \mathbb{R}$  und  $\mathbb{R} \times ]a, b[$ ) eine Subbasis, aber keine Basis, der euklidischen Topologie auf  $\mathbb{R}^2$ : Der Schnitt eines horizontalen mit einem vertikalen Streifen ist ja offenbar ein offenes Rechteck, was nicht Vereinigung irgendwelcher Streifen sein kann. Aber da in jeder euklidisch offenen Scheibe noch ein offenes Rechteck um den Mittelpunkt steckt, ist jede euklidisch offene Menge Vereinigung aller in ihr enthaltenen offenen Rechtecke.

Insbesondere bilden die (sagen wir beschränkten) offenen Rechtecke ebenso wie die Scheiben eine Basis der euklidischen Topologie, und das gleiche funktioniert (mit gleichem Argument) auch mit offenen Würfeln und Kugeln im  $\mathbb{R}^n$ . Das ganze ist im Satz, dass alle Normen auf  $\mathbb{R}^n$  äquivalent sind, auch noch einmal enthalten; den Satz kennen Sie vielleicht aus der Analysis, wir werden später etwas allgemeineres beweisen.

(3) Als Umformulierung der Definition (beziehungsweise der auf sie folgenden Beobachtung) sei noch explizit erwähnt, dass für ein  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ , welches die Eigenschaft einer Basis hat (also, dass alle endlichen Durchschnitte sich als beliebige Vereinigung darstellen lassen),

eine Menge  $U \subseteq X$  genau dann in  $\langle \mathcal{B} \rangle$  liegt, wenn es zu jedem  $x \in U$  ein  $B \in \mathcal{B}$  gibt, mit  $x \in B \subseteq U$ , also nun wirklich analog zur Definition der Topologie einer Metrik. Ist  $\mathcal{B}$  bloß irgendeine Ansammlung von Teilmengen, muss man hier gemäß des Kriteriums aus 3.7 ein  $B \in \mathcal{B}^\circ$  zulassen.

- (4) Und um wieder ein etwas exotischeres Beispiel zu geben: Man nehme einmal

$$\mathcal{B} = \{U \subseteq \mathbb{R} \mid \text{es existieren } a < b \in \mathbb{R} \text{ mit } U = [a, b]\}$$

als Basis (!) einer Topologie auf  $\mathbb{R}$ . Dies ist die *Sorgenfrey*-Topologie, wieder eher eine Gegenbeispieltopologie, wie wir sehen werden. Sie liegt jedenfalls strikt zwischen der euklidischen und der diskreten Topologie auf  $\mathbb{R}$ : Jedes beschränkte offene Intervall ist wegen

$$]a, b[ = \bigcup_{a < c < b} [c, b[$$

auch Sorgenfrey offen, aber  $]a, b[$  ist dies offenbar nicht.

- (5) Ist  $\mathcal{B}$  eine Subbasis für eine Topologie  $\mathcal{T}$  auf  $Y$ ,  $X$  eine weitere Menge und  $f: X \rightarrow Y$  so bildet  $f^*\mathcal{B} = \{U \subseteq X \mid \text{es gibt ein } V \in \mathcal{B} \text{ mit } f^{-1}(V) = U\}$  eine Subbasis von  $f^*\mathcal{T}$ ; das folgt mittels der Beschreibung der erzeugten Topologie in 3.7 sofort daraus, dass  $f^{-1}: \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  mit beliebigen Schnitten und Vereinigungen vertauscht.

Dieses letzte Beispiel liefert auch sofort das folgende nützliche Kriterium für Stetigkeit (und damit auch für Konvergenz!):

**3.10. Lemma** *Ist  $\mathcal{B}$  eine Subbasis für eine Topologie  $\mathcal{S}$  auf  $Y$  und  $(X, \mathcal{T})$  ein weiterer topologischer Raum, so ist eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  schon dann stetig (bezüglich  $\mathcal{S}$  und  $\mathcal{T}$ ), wenn  $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$  für jedes  $U \in \mathcal{B}$  gilt.*

PROOF. Die Abbildung  $f$  ist schließlich genau dann stetig, wenn  $f^*\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$  ist und wegen  $\langle f^*\mathcal{B} \rangle = f^*\mathcal{S}$  übersetzt sich das genau in die gestellte Bedingung.  $\square$

Wir können insbesondere für eine Familie  $\mathcal{F}$  von Topologien auf  $X$ , nicht nur den Durchschnitt  $\bigcap_{\mathcal{T} \in \mathcal{F}} \mathcal{T}$  als neue Topologie betrachten (dieser Prozess ist tatsächlich selten wirklich interessant) sondern auch die Vereinigung  $\bigcup_{\mathcal{T} \in \mathcal{F}} \mathcal{T}$  zu einer Topologie vervollständigen; in Zeichen

$$\bigvee_{\mathcal{T} \in \mathcal{F}} \mathcal{T} := \left\langle \bigcup_{\mathcal{T} \in \mathcal{F}} \mathcal{T} \right\rangle$$

Wir erhalten dann aus 3.10 direkt:

**3.11. Korollar** *Ist  $\mathcal{F}$  eine Familie von Topologien auf  $X$ , so ist eine Abbildung  $Z \rightarrow X$  aus einem topologischen Raum  $(Z, \mathcal{S})$  stetig bezüglich  $\bigvee_{\mathcal{T} \in \mathcal{F}} \mathcal{T}$  genau dann, wenn sie es bezüglich jeder der Topologien  $\mathcal{T} \in \mathcal{F}$  ist.*

Das gleiche gilt dann auch für konvergente Folge: Eine Folge in  $X$  konvergiert bezüglich  $\bigvee_{\mathcal{T} \in \mathcal{F}} \mathcal{T}$  gegen ein  $x \in X$  genau dann, wenn sie dies bezüglich aller  $\mathcal{T} \in \mathcal{F}$  tut.

Damit können wir nun endlich viele wirklich interessante Topologien bauen. Ich mache dies einmal im Kontext von Normen, Sie werden die vielfältige Anwendbarkeit der Idee hoffentlich sofort einsehen.

**3.12. Beispiel** (1) Betrachte auf dem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  der stetigen Funktionen für Intervalle  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  die Halbnormen  $\|-\|_{[a, b]}$  mit

$$\|f\|_{[a, b]} = \sup_{a \leq t \leq b} |f(t)|;$$

das ist natürlich wirklich keine Norm: Der Wert von  $\|f\|_{[a, b]}$  sagt nichts über das Verhalten von  $f$  außerhalb von  $[a, b]$ ! Eine Folge konvergiert bezüglich dieser Norm offenbar, wenn sie es auf  $[a, b]$  gleichmäßig tut.

Wir können nun die Topologie

$$\bigvee_{[a, b] \subseteq \mathbb{R}} \mathcal{O}_{\|-\|_{[a, b]}}$$

betrachten. Gemäß 3.11 sehen wir, dass eine Folge bezüglich ihr konvergiert, wenn sie das gleichmäßig auf jedem beschränkten Intervall tut, oder äquivalent (wie sie hoffentlich in der Analysis ebenfalls gezeigt haben und wir bei der Diskussion der Kompaktheit später auch noch einmal besprechen werden), dass es um jeden Punkt eine Umgebung gibt, auf der die Folge gleichmäßig konvergiert; kurzum wenn sie lokal gleichmäßig konvergiert. Vom Nutzen dieser Topologie muss ich Sie hoffentlich nicht noch weiter überzeugen.

- (2) Für den  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  der glatten Funktionen und  $l \in \mathbb{N}$  können wir ebenso die Halbnormen  $\|-\|_{[a,b]}^{(l)}$  mit

$$\|f\|_{[a,b]}^{(l)} = \sup_{a \leq t \leq b} |f^{(l)}(t)|;$$

betrachten (die natürlich noch weniger echte Normen sind). Es ist dann

$$\bigvee_{l \in \mathbb{N}, [a,b] \subseteq \mathbb{R}} \mathcal{O}_{\|-\|_{[a,b]}^{(l)}}$$

die Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz aller Ableitungen.

- (3) Und schließlich betrachte man für  $x \in \mathbb{R}$  die Halbnorm  $|-\|_x$  auf  $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  mit

$$|f|_x = |f(x)|;$$

offenbar konvergiert eine Folge von Funktionen bezüglich dieser Halbnorm genau dann, wenn ihre Werte bei  $x$  es tun. Und bezüglich der Topologie

$$\bigvee_{x \in \mathbb{R}} \mathcal{O}_{|-\|_x}$$

konvergiert eine Funktionenfolge also genau dann, wenn sie es punktweise tut. Wir haben hier also die von mir ganz zu Anfang versprochene Topologie der punktweisen Konvergenz vor uns.

In 1.5 hatten wir uns überlegt, dass die Topologie der punktweisen Konvergenz nicht von einer Metrik induziert sein kann; hier haben wir nun also unser erstes Beispiel einer echt neuen nützlichen Topologie vor uns. Bei den anderen beiden Beispielen ist die Situation subtiler: Sie sind überraschenderweise von einer Metrik, aber nicht mehr von einer Norm induziert. Insbesondere muss so eine Metrik etwas gekünstelt sein. In den Übungen müssen Sie folgenden Satz nachweisen:

**3.13. Satz** (Fréchet) *Ist  $d: \mathbb{N} \rightarrow F(X \times X, [0, \infty])$  eine Familie von Pseudometriken, so gilt*

$$\bigvee_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_{d_n} = \mathcal{O}_{d_{\text{Fré}}},$$

wobei

$$d_{\text{Fré}}(x, y) = \sum_{i \geq 0} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{d_i(x, y)}{1 + d_i(x, y)}$$

wieder eine Pseudometrik ist (und eine Metrik, wenn auch nur ein  $d_i$  das ist).

Es gilt auch das einfachere  $\mathcal{O}_d \vee \mathcal{O}_{d'} = \mathcal{O}_{d+d'}$ , was Sie wohl gleich mitbeweisen werden. Kombinieren wir das mit der Beobachtung, dass für Intervalle  $K \subseteq L$  offenbar  $\|f\|_K \leq \|f\|_L$  gilt und damit  $\mathcal{O}_{\|-\|_L} \subseteq \mathcal{O}_{\|-\|_K}$ , sodass etwa

$$\bigvee_{[a,b] \subseteq \mathbb{R}} \mathcal{O}_{\|-\|_{[a,b]}} = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_{\|-\|_{[-n,n]}}$$

so folgt die Metrisierbarkeit dieser Topologie nun direkt aus dem Fréchet'schen Satz; ähnlich wenn man die Ableitungen mit einbezieht. Bei der Topologie der punktweisen Konvergenz kann man aber eben keine abzählbare Ansammlung von Halbnormen finden, die gemeinsam die Topologie induzieren. Irgendeine Art Abzählbarkeit ist in die Grendfesten der metrischen Räume fest verbacken. Wir kitzeln sie im übernächsten Kapitel heraus und beenden die hiesige Diskussion nun mit der Nichtexistenz einer Norm, die lokal gleichmäßige Konvergenz induziert:

**3.14. Satz** *Es gibt keine (Halb-)Norm auf  $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  die die Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz induziert.*

PROOF. Bezeichnen wir einmal mit  $D_n(f, r)$  die Kugel um  $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  mit Radius  $r > 0$  die bezüglich der Halbnorm  $\|-\|_{[-n, n]}$  gebildet wird. Nach der Vorbemerkung sind dann die Kugeln  $D_n(f, r)$  zusammen eine Subbasis der Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz. Sogar eine Basis: Da offenbar immer  $\|g\|_{[-n, n]} \leq \|g\|_{[-(n+1), n+1]}$ , gilt  $\mathcal{O}_{\|-\|_{[-n, n]}} \subseteq \mathcal{O}_{\|-\|_{[-(n+1), n+1]}}$ , sodass der Durchschnitt von  $D_n(f, r)$  und  $D_m(g, s)$  bei  $n \leq m$  sicherlich in  $\mathcal{O}_{\|g\|_{[-m, m]}}$  liegt und damit Vereinigung vom Kugeln bezüglich  $\|g\|_{[-m, m]}$  ist.

Nehmen wir nun also an, wir hätten eine Halbnorm  $\|-\|: C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , die diese Topologie erzeugt. Dann wäre sicherlich  $D_{\|-\|}(0, 1)$  offen, und müsste deshalb nach der vorigen Überlegung eine der Kugeln  $D_n(0, r)$  enthalten. Aber umgekehrt müsste dann auch  $D_{n+1}(0, r)$  eine der Kugeln  $D_{\|-\|}(0, s)$  enthalten, also insgesamt

$$D_n(0, r) \subseteq D_{\|-\|}(0, 1) \subseteq D_{n+1}\left(0, \frac{r}{s}\right),$$

was offenbar absurd ist: Eine stetige Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist in der linken Seite genau dann enthalten, wenn sie auf  $[-n, n]$  nur Werte in  $[-r, r]$  annimmt. Aber über ihr Werteverhalten auf  $[-(n+1), n+1]$  folgt daraus natürlich nichts: Man interpoliere etwa stückweise linear die Zuordnung

$$-(n+1) \mapsto \frac{2r}{s}, \quad -n \mapsto 0, \quad n \mapsto 0, \quad n+1 \mapsto \frac{2r}{s}$$

für eine Funktion die in der linken aber nicht der rechten Seite enthalten ist.  $\square$

Mit der Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz werden wir uns später noch etwas weiter beschäftigen. Nun aber noch eine weitere wichtige Sorte Topologien, die mit der der punktweisen Konvergenz eng zusammenhängt:

**3.15. Konstruktion** Ist  $I$  eine Menge und  $(X_i, \mathcal{T}_i)$  ein topologischer Raum für jedes  $i \in I$ , so geben wir dem Produkt  $\prod_{i \in I} X_i$  die *Produkttopologie*  $\bigvee_{i \in I} \text{pr}_i^* \mathcal{T}_i$ , wo  $\text{pr}_j: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j$  die Projektion auf der  $j$ -ten Faktor bedeutet.

Zusammen genommen besagen 3.11 und 3.4 dann, dass eine Abbildung  $f: Y \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$  bezüglich einer Topologie  $\mathcal{S}$  auf  $Y$  und der Produkttopologie auf dem Produkt stetig ist genau dann, wenn es alle Komponentenfunktionen

$$f_j: Y \xrightarrow{f} \prod_{i \in I} X_i \xrightarrow{\text{pr}_j} X_j$$

bezüglich  $\mathcal{S}$  und  $\mathcal{T}_j$  sind.

**3.16. Beispiel** (1) Es gilt offenbar  $F(I, X) = \prod_{i \in I} X$  für je zwei Mengen  $I$  und  $X$  und die Projektion auf die  $i$ -te Koordinate ist nichts weiter als  $f \mapsto f(i)$ . Für  $I = \mathbb{R} = X$  ist weiterhin der Rückzug der euklidischen Topologie entlang  $\text{pr}_r: \prod_{r \in \mathbb{R}} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  genau  $\mathcal{O}_{|-|_r}$ : Eine offene Menge in der linken Topologie ist per Definition von der Form  $\text{pr}_r^{-1}(U)$  mit  $U \subseteq \mathbb{R}$  offen, hat also die Mengen  $\text{pr}_r^{-1}([a - \epsilon, a + \epsilon])$  als (Sub-)Basis. Aber das ist genau  $D_{|-|_r}(g, \epsilon)$  für jede Funktion  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(r) = a$ . Und diese Kugeln bilden ja per Definition eine (Sub-)Basis von  $\mathcal{O}_{|-|_r}$ .

(2) Etwas einfacher aber noch wichtiger ist vielleicht die Beobachtung, dass das Produkt der euklidischen Topologie auf  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^m$  die euklidische Topologie auf dem  $\mathbb{R}^{n+m}$  ergeben: Es bilden per definitionem die offenen vertikalen und horizontalen Streifen  $\text{pr}_1^{-1}(D(x, \delta)) = D(x, \delta) \times \mathbb{R}^m$  und  $\text{pr}_2^{-1}(D(y, \epsilon)) = \mathbb{R}^n \times D(y, \epsilon)$  eine Subbasis der Produkttopologie. Diese Mengen sind offenbar offen in der euklidische Topologie des  $\mathbb{R}^{n+m}$ , sodass die euklidische Topologie schon einmal nicht größer als die Produkttopologie sein kann. Und ganz analog zum Fall  $n = 1 = m$  in 3.9 enthält die euklidisch offene Kugel um  $(x, y)$  mit Radius  $r > 0$  die "rechteckigen" Menge

$$D(x, \delta) \times D(y, \epsilon) = D(x, \delta) \times \mathbb{R}^m \cap \mathbb{R}^n \times D(y, \epsilon)$$

sobald  $\delta$  und  $\epsilon$  nur  $\sqrt{\delta^2 + \epsilon^2} \leq r$  erfüllen (man kann also etwa  $\delta = \frac{r}{\sqrt{2}} = \epsilon$  nehmen. Es ist also  $D((x, y), r)$  auch in der Produkttopologie offen.

Insbesondere erhält man hieraus, dass eine Abbildung  $X \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig ist genau dann, wenn jede ihrer Koordinatenfunktionen das ist; genau wie man das aus der Analysis gewohnt ist.

- (3) In der Zariski-Topologie stimmt das Analog nicht mehr: Das Produkt der Zariski-Topologien von  $K^n$  und  $K^m$  ist meistens strikt gröber als die Zariski-Topologie auf dem  $K^{n+m}$ . Zum Beispiel ist bei  $n = 1 = m$  die Zariski-Topologie einfach die koendliche Topologie, sodass eine Subbasis der Produkttopologie aus den Mengen  $K \times (K \setminus F)$  und  $(K \setminus F) \times K$  besteht, und damit die Mengen  $(K \setminus F) \times (K \setminus F')$ , wobei  $F, F' \subseteq K$  endlich sind eine Basis der Topologie bilden. Insbesondere muss jede nicht-leere offene Menge eine solche enthalten, und dann umgekehrt jede abgeschlossene Mengen außer  $K^2$  in einem  $F \times K \cup K \times F'$  enthalten sein. Aber wenn  $K$  unendlich ist, ist

$$V(T_1 - T_2) = \{(x, y) \in K^2 \mid x = y\}$$

offenbar abgeschlossen und in keiner solchen enthalten.

Es ist also nicht jede Abbildung in den  $K^2$  die komponentenweise Zariski-stetig ist, selbst wieder Zariski-stetig. Ein instruktives Beispiel hierfür ist der Fall  $K = \mathbb{C}$  mit der Abbildung  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2, z \mapsto (z, \bar{z})$ .

- (4) Allgemein bilden per Definition die Mengen

$$\text{pr}_j^{-1}(U) = U \times \prod_{j \neq i \in I} X_i$$

eine Subbasis für die Produkttopologie von  $\prod_{i \in I} X_i$ , wo  $U \subseteq X_j$  offen ist. Endliche Schnitte dieser Mengen haben also die Form

$$U_{i_1} \times \cdots \times U_{i_n} \times \prod_{j \neq i_1, \dots, i_n} X_i$$

für eine Injektion  $i: \{1, \dots, n\} \rightarrow I$  und  $U_{i_k} \subseteq X_{i_k}$  offen. Diese Menge bilden gemeinsam also eine Basis, insbesondere ist eine solche in jeder offenen Menge enthalten: Offene Menge in unendlichen Produkten sind also riesig! Ein beliebiger Fehler ist es beispielsweise anzunehmen, dass die Mengen  $\prod_{i \in I} U_i$  mit  $U_i \subseteq X_i$  bezüglich der Produkttopologie offen ist, aber das stimmt eben nur, wenn für alle bis auf endlich viele  $i \in I$  schon  $U_i = X_i$  gilt.

Die Topologie für die beliebige Produkte offener Mengen offen sind (sie gibt es natürlich auch!) heißt die *Boxtopologie*. Für endliche Indexmengen stimmt sie natürlich mit der Produkttopologie überein, aber für unendliche Indexmengen ist sie eben echt feiner.

Bei abgeschlossenen Mengen ist das anders: Da  $\text{pr}_j: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j$  stetig ist, ist natürlich mit  $A_j \subseteq X_j$  auch  $\text{pr}_j^{-1}(A_j) = A_j \times \prod_{j \neq i \in I} X_i$  abgeschlossen. Und da beliebige Schnitte von abgeschlossenen Mengen abgeschlossen sind ist dann auch

$$\prod_{i \in I} A_i = \bigcap_{j \in I} \left[ A_j \times \prod_{j \neq i \in I} X_i \right]$$

abgeschlossen in der Produkttopologie.

- (5) Das Produkt beliebig vieler indiskreter Räume ist nach obiger Analyse wieder indiskret (ein Produkt ist ja schließlich leer, sobald ein Faktor das ist). Ebenso sind endliche Produkte diskrete Räume wieder diskret (ein Raum ist schließlich diskret, wenn jede einelementige Teilmenge  $\{x\}$  das ist), aber unendliche Produkte diskreter Räume sind vielleicht etwas überraschenderweise nicht wieder diskret! Mehr dazu in den Übungen.
- (6) Aus dem Satz von Fréchet folgt, dass die Topologie abzählbarer Produkte metrischer Räume wieder durch eine Metrik beschrieben werden kann, aber mittels der Interpretation der Topologie der punktweisen im ersten Punkt folgt eben, dass das für überabzählbare Produkt nicht mehr stimmen muss.

Neben der Herausstellung der Gemeinsamkeit der Topologie von  $\prod_{i=1}^n \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$  und  $\prod_{r \in \mathbb{R}} \mathbb{R} = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  erfüllt die Produkttopologie für uns direkt noch einen anderen wichtigen Zweck: Sie erst erlaubt es die topologischen Versionen von algebraischen Strukturen zu definieren. Das einfachste Beispiel ist:

**3.17. Definition** Ein *topologisches Monoid* besteht aus einem topologischen Raum  $M$ , einem Element  $e \in M$  und einer Abbildung  $\cdot : M \times M \rightarrow M$  derart, dass für alle  $m, n, l \in M$  gilt

- (1)  $m \cdot e = m = e \cdot m$ ,
- (2)  $(m \cdot n) \cdot l = m \cdot (n \cdot l)$ , und
- (3)  $\cdot$  ist stetig bezüglich der Produkttopologie auf  $M \times M$

Nun eine kleine Nebenüberlegung: Naheliegender würde man nun eine topologische Gruppe vielleicht als ein topologisches Monoid definieren, das eine Gruppe ist. Aber dann folgt nicht, dass die Inversionsabbildung ebenfalls stetig ist (Beispiel weiter unten), was man natürlich meist wichtig ist. Es gibt eine ähnliche Diskussion, die man oft im ersten Semester einmal hört: Ist das neutrale Element eines Monoiden (oder einer Gruppe) ein Extradatum in der Definition oder fordert man nur seine Existenz (es ist dann ja eindeutig bestimmt)? Dort ist es letztlich egal, aber die Lehre beim Übergang von Monoiden und Gruppen zu ihren topologischen Versionen ist, dass es allgemein meist besser ist, Objekte, die man gerne mit bestimmten Eigenschaften vor sich hätte in die Definition mit aufzunehmen, anstatt nur ihre Existenz zu fordern, selbst dann, wenn sie eindeutig bestimmt sind. Wir setzen also:

**3.18. Definition** Eine *topologische Gruppe* besteht aus einem topologischen Raum  $G$ , einem Element  $e \in M$ , einer Abbildung  $\cdot : M \times M \rightarrow M$  und einer Abbildung  $i : M \rightarrow M$  derart, dass die ersten drei Dinge zusammen ein topologisches Monoid bilden und für alle  $m \in M$

- (1)  $m \cdot i(m) = e = i(m) \cdot m$  und
- (2)  $i$  ist stetig.

Natürlich kann man nun beliebig weiter machen: Topologische Ringe (mit Stetigkeit von Addition, Multiplikation und Inversion (bezüglich Addition)), topologische Körper mit zusätzlicher Stetigkeit der Inversion bezüglich Multiplikation (auf  $K \setminus \{0\}$ ), topologische Lie-Algebren, etc. Ich nehme vielleicht noch einmal der Fall der Moduln heraus (wer mit Moduln nicht vertraut ist, ersetze überall das Wort "Ring" durch "Körper" und das Wort "Modul" durch "Vektorraum").

**3.19. Definition** Ist  $R$  ein topologischer Ring und  $M$  ein  $R$ -Modul, der mit einer Topologie ausgestattet ist, so heißt  $M$  ein *topologischer  $R$ -Modul*, wenn die Topologie  $M$  zu einer topologischen (abelschen) Gruppe macht und die Skalarmultiplikation  $M \times R \rightarrow M$  bezüglich der Produkttopologie auf der Quelle stetig ist.

**3.20. Beispiel** (1) Es ist  $\mathbb{R}$  natürlich ein topologischer Körper, und damit insbesondere  $\mathbb{R}$  bezüglich der Addition eine topologische Gruppe,  $\mathbb{R}$  bezüglich der Multiplikation ein topologisches Monoid, und  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  bezüglich der Multiplikation eine topologische Gruppe.

Und mittels der Teilraumtopologie bildet dann auch  $\mathbb{Q}$  einen topologischen Körper.

Und das gleiche gilt für  $\mathbb{C}$ : In Koordinaten via  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  ausgeschrieben gilt ja schließlich

$$(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d), \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc), \quad -(a, b) = (-a, -b),$$

$$\text{und} \quad \frac{1}{(a, b)} = \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right),$$

alles stetige Abbildungen. Und falls sie die Quaternionen kennen: Die bilden einen topologischen Schiefkörper.

- (2) Die  $p$ -adische Topologie auf  $\mathbb{Z}$  macht  $\mathbb{Z}$  zu einem topologischen Ring.
- (3) Stattdessen wir  $\mathbb{R}$  mit der Addition und der Sorgenfrey-Topologie aus, so ist dies wohl das einfachste Beispiel für ein topologisches Monoid, das eine (abelsche) Gruppe ist, aber keine topologische Gruppe: Es gilt schließlich  $(-)^{-1}([a, b[) = ] - b, -a]$  und das ist nicht Sorgenfrey-offen.

Ein Beispiel eines topologischen Rings, der ein Körper, aber kein topologischer Körper ist, gibt es in den Übungen.

- (4) Gibt man einem/einer Monoid/Gruppe/Ring/Körper/Modul die indiskrete Topologie, so hat man eine(n) topologischen/topologische Monoid/Gruppe/Ring/Körper/Modul vor sich: Jede Abbildung mit Ziel einem indiskreten Raum ist schließlich stetig.

Ähnlich bei der diskreten Topologie: Hierzu muss man benutzen, dass das Produkt zweier diskreter topologischer Räume wieder diskret ist. Einzig muss man bei Moduln aufpassen: Das Argument funktioniert, wenn sowohl  $R$  als auch  $M$  die diskrete Topologie tragen. Über dem topologischen Körper  $\mathbb{R}$  mit der euklidischen Topologie kann ein Vektorraum  $V$  nur dann diskret sein, wenn  $V = 0$  gilt: Für  $v \in V$  ist ja dann  $\lambda \mapsto v\lambda$  eine stetige Abbildung von  $\mathbb{R}$  in einen diskreten Raum, aber eine solche muss konstant sein, da sich  $\mathbb{R}$  ja nach Aufgabe auf dem ersten Zettel nicht in disjunkte offene Intervalle zerlegen lässt.

- (5) Jeder normierte Raum ist ein topologischer  $\mathbb{R}$ -Vektorraum, und ebenso macht jede Topologie auf einem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum, die wie in 3.12 durch eine Familie von Halbnormen induziert ist,  $V$  zu einem topologischen Vektorraum; Nachweis in den Übungen. Ein topologischer Vektorraum, dessen Topologie sich durch eine abzählbare Menge von Halbnormen erzeugt wird, heißt ein *Präfréchetraum* (für einen Fréchetraum fordert man auch noch Vollständigkeit). Das Studium topologischer  $\mathbb{R}$ -Vektorräume ist beinahe synonym mit dem Gebiet der Funktionalanalysis, da die interessantesten Beispiele eben Funktionenräume mit den verschiedensten Topologien sind (nämlich denen, die etwa beim Studium von Differential- und Integraloperatoren erforderlich sind).

Man darf hier übrigens nicht den  $\infty$  in der Definition einer Halbnorm zulassen (im Gegensatz zu unserer Konvention für Metriken): In den Übungen haben wir schon gesehen, dass dann die Skalarmultiplikation nicht mehr stetig sein muss.

- (6) Mit der Produkttopologie ist für jeden topologischen Ring  $R$  der Modul  $R^n$  ein topologischer Modul, und allgemein  $\prod_{i \in I} R = F(I, R)$  für jede Menge  $I$ . Als Untermodul darin dann auch  $\bigoplus_{i \in I} R$  mit der Teilraumtopologie.
- (7) Ähnlich ist  $GL_n(K)$  für jeden topologischen Körper  $K$  eine topologische Gruppe mit der Teilraumtopologie  $GL_n(K) \subseteq K^{n^2}$  der Produkttopologie: Die Multiplikation ist komponentenweise polynomiell, und daher stetig und die Inversion ist das nach der Cramer'schen Regel: Es gilt schließlich

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^{\text{cf}},$$

wo  $A^{\text{cf}}$  die (je nach Konvention eventuell transponierte) Cofaktormatrix von  $A$  ist, welche durch  $A_{i,j}^{\text{cf}} = \det(A[i, j])$  gegeben ist; hier bezeichnet  $A[i, j]$  die Matrix, die aus  $A$  durch Streichen der  $i$ -Spalte und  $j$ -ten Zeile entsteht. Da Determinanten polynomielle Funktionen sind, folgt die Stetigkeit.

Wegen der auftauchenden Inversion ist  $GL_n(R)$  aber nicht für jeden topologischen Ring eine topologische Gruppe bezüglich der Teilraumtopologie, sondern eben nur für solche für die die Inversion  $R^\times \rightarrow R$  stetig ist. Man kann  $R^\times$  übrigens stattdessen mit der von  $(\text{id}, (-)^{-1}): R^\times \rightarrow R^2$  induzierten Topologie (bezüglich der Produkttopologie im Ziel) ausstatten, und erhält dann immer eine topologische Gruppe.

- (8) Es sei  $R$  ein topologischer Ring und  $M$  ein  $R$ -Modul, der eine endliche Basis besitzt, zum Beispiel weil  $R$  heimlich ein Körper ist und  $M$  ein endlich erzeugter Vektorraum. Dann erbt  $M$  eine kanonische Topologie von  $R$ , die es zu einem topologischen Modul macht: Eine endliche Basis  $\mathcal{B}$  von  $R$  liefert dann nach den Sätzen am Anfang der linearen Algebra einen Isomorphismus von  $R$ -Moduln

$$\varphi_{\mathcal{B}}: \bigoplus_{b \in \mathcal{B}} R \longrightarrow M, \quad f \longmapsto \sum_{b \in \mathcal{B}} b \cdot f_b.$$

Aber die linke Seite ist nichts weiter als das Produkt  $\prod_{b \in \mathcal{B}} R$  ( $\mathcal{B}$  ist endlich!). Stattdessen wir sie also mit der Produkttopologie aus, können also eine Menge in  $M$  als offen deklarieren,

wenn ihr Urbild unter  $\varphi_{\mathcal{B}}$  das ist. Diese Topologie erbt dann natürlich alle Eigenschaften der linken Seite, macht also  $M$  insbesondere zu einem topologischen  $R$ -Modul. Und sie ist unabhängig von der Basiswahl: Dass eine zweite endliche Basis  $\mathcal{B}'$  die gleiche Topologie liefert, übersetzt sich dazu, dass die Bijektion

$$\bigoplus_{b \in \mathcal{B}} R \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{B}}} M \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{B}'}^{-1}} \bigoplus_{b \in \mathcal{B}'} R$$

ein Homöomorphismus ist. Da man die Rolle von  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{B}'$  vertauschen kann, reicht es hier die Stetigkeit nachzuweisen, und diese folgt beinahe aus den Definitionen: Per Definition von Teilraumtopologien müssen wir prüfen, dass die Komposition

$$\bigoplus_{b \in \mathcal{B}} R \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{B}'}^{-1} \circ \varphi_{\mathcal{B}}} \bigoplus_{b \in \mathcal{B}'} R \xrightarrow{\text{incl}} \prod_{b \in \mathcal{B}'} R$$

stetig ist, per Definition von Produkttopologien müssen wir prüfen, dass die Kompositionen

$$\bigoplus_{b \in \mathcal{B}} R \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{B}'}^{-1} \circ \varphi_{\mathcal{B}}} \bigoplus_{b \in \mathcal{B}'} R \xrightarrow{\text{pr}_{b'}} R$$

stetig sind. Aber jede lineare Abbildung  $\bigoplus_{b \in \mathcal{B}} R \rightarrow R$  ist eine endliche Summe von Vielfachen der Koordinatenprojektionen (diese bilden ja schließlich eine Basis des Dualraums!). Und Koordinatenprojektionen sind per Konstruktion der Produkttopologie stetig und Summen stetiger Abbildung in jede stetige abelsche Gruppe hinein sind wieder stetig.

Das letzte Argument zeigt auch noch, dass bezüglich dieser Topologie auf  $M$  und einer analogen auf  $M'$ , jede  $R$ -lineare Abbildung stetig ist.

Als letzte wichtige Beispielklasse betrachten nun den dualen Prozess zur induzierten Topologie, womit wir das zweite Problem mit metrischen Räumen aus dem ersten Kapitel lösen werden (nämlich, dass Metriken sich nicht gut mit Quotienten vertragen).

Wir setzen:

**3.21. Definition** Ist  $f: X \rightarrow Y$  eine Abbildung und  $\mathcal{T}$  eine Topologie auf  $X$ , so nennen wir

$$f_! \mathcal{T} = \{U \subseteq Y \mid f^{-1}(U) \in \mathcal{T}\}$$

die *koinduzierte Topologie* auf  $X$ . Gilt  $Y = X/\sim$  für eine Äquivalenzrelation  $\sim$  auf  $X$  und  $f$  ist einfach die kanonische Projektion  $x \mapsto [x]_{\sim}$ , so nennt dies spezieller die *Quotiententopologie* auf  $X/\sim$ .

Dass dies wirklich immer eine Topologie ist, folgt sofort aus der Vertauschbarkeit von  $f^{-1}$  mit dem Bilden von Durchschnitten und Vereinigungen. Und wir haben auch:

**3.22. Beobachtung** Die Topologie  $f_! \mathcal{T}$  ist die feinste  $X$  bezüglich der  $f$  stetig ist, und eine Abbildung  $g: Y \rightarrow Z$  in einen topologischen Raum  $Z$  ist stetig bezüglich  $f_! \mathcal{T}$  genau dann, wenn die Komposition

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

stetig bezüglich  $\mathcal{T}$  ist. Wenn  $Y$  schon eine Topologie  $\mathcal{S}$  besitzt, dann ist  $f$  stetig bezüglich  $\mathcal{T}$  und  $\mathcal{S}$  genau dann, wenn  $\mathcal{S} \subseteq f_! \mathcal{T}$ .

**3.23. Beispiel** (1) Im Gegensatz zum Fall von induzierten Topologie stimmt es nun aber eben nicht, dass Topologien der Form  $f_! \mathcal{O}_d$  wieder von (Pseudo-)Metriken induziert sind, wie zum Beispiel aus 1.6 folgt. Ein wohl noch einfacheres Beispiel dieses Phänomens ist  $X = [0, 1]$  mit der Relation, die  $]0, 1]$  auf einen Punkt kollabiert (also  $x \sim y$  wenn  $x = y$  oder  $x, y \in ]0, 1]$ ). Hier besteht der Quotient aus den zwei Elementen  $\{0\}$  und  $]0, 1]$  und  $\emptyset, \{0, 1\}, \{\{0\}, ]0, 1]\}$  als offenen Mengen. Das ist via  $i \mapsto [i]_{\sim}$  offenbar homöomorph zum Sierpinskierraum  $\mathfrak{S}$ .

- (2) Wir beobachten auch noch direkt, dass eine Teilmenge von  $Y$  bezüglich  $f_! \mathcal{T}$  genau dann offen ist, wenn ihr Schnitt mit dem Bild von  $f$  das ist (sie haben ja das gleiche Urbild). Insbesondere ist das Bild von  $f$  und auch jede Teilmenge von  $Y$ , die das Bild von  $f$  nicht schneidet in  $f_! \mathcal{T}$  offen (und damit das Bild auch abgeschlossen).

Interessant ist die koinduzierte Topologie also eigentlich nur bei surjektiven Abbildungen, aber es wird sich bei Formulierungen immer mal wieder als nützlich erweisen auch den allgemeinen Fall zuzulassen.

Hier ist eins der wohl wichtigsten Beispiele:

**3.24. Beispiel** Betrachte  $[0, 2\pi]$  mit der Relation die 0 und  $2\pi$  identifiziert, also  $x \sim y$  falls  $x = y$  oder  $\{x, y\} = \{0, 2\pi\}$ . Dann liefert

$$(\cos, \sin): [0, 2\pi] \longrightarrow S^1$$

eine Bijektion  $f: [0, 2\pi]/\sim \rightarrow S^1$ . Ich behaupte, dass diese sogar ein Homöomorphismus ist, also stetig mit stetiger Inverser. Dass  $f$  stetig ist, folgt direkt aus 3.22. Für  $f^{-1}$  ist das komplizierter, weil es keine stetige Abbildung  $g: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ , derart dass  $f^{-1}(x, y) = [g(x, y)]$  gilt: Es müsste dann ja  $g(S^1) = [0, 2\pi[$  oder  $g(S^1) = ]0, 2\pi]$  gelten, aber das ist mit dem Satz von Bolzano-Weierstraß nicht kompatibel: Das Urbild einer Folge die gegen 0 bzw.  $2\pi$  konvergiert, kann keine konvergente Teilfolge haben.

Die wohl beste Beschreibung von  $f^{-1}$  ist

$$f^{-1}(x, y) = \begin{cases} [\arccos(x)] & y \geq 0 \\ [2\pi - \arccos(x)] & y \leq 0. \end{cases}$$

Um zu sehen, dass dies eine stetige Abbildung liefert, bequemen wir nun die folgende Beobachtung angewendet mit  $M_0 = \{(x, y) \in S^1 \mid y \geq 0\}$  und  $M_1 = \{(x, y) \in S^1 \mid y \leq 0\}$ .

**3.25. Beobachtung** Ist  $f: X \rightarrow Y$  eine Abbildung,  $X, Y$  topologische Räume und  $g_i: M_i \rightarrow X$  eine Ansammlung von stetigen Abbildungen. Enthält dann die Topologie von  $X$  den Schnitt der koinduzierten Topologien der  $g_i$ , so ist  $f$  schon dann stetig wenn es alle  $M_i \xrightarrow{g_i} X \xrightarrow{f} Y$  sind.

Das gilt insbesondere immer dann, wenn die  $M_i$  offene Teilmengen von  $X$  mit der Teilraumtopologie sind und  $X = \bigcup_{i \in I} M_i$  gilt, und auch wenn man endlich viele abgeschlossene  $M_i \subseteq X$  (ebenfalls mit der Teilraumtopologie und  $X = \bigcup_{i \in I} M_i$ ) vor sich hat; denn in jedem Falle gilt  $f^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} M_i \cap f^{-1}(U)$ , sodass wenn  $U$  und alle  $M_i$  offen sind auch  $f^{-1}(U)$  offen ist, und wenn  $U$  abgeschlossen ist,  $I$  endlich und  $M_i$  abgeschlossen, so auch  $f^{-1}(U)$ .

Mit anderen Worten, man kann stetige Abbildungen auf einer beliebigen offenen Überdeckung und einer endlichen abgeschlossenen Überdeckung stückweise angeben.

**3.26. Beispiel** Betrachten wir auch noch einmal das Beispiel aus 1.6, also  $\mathbb{R}/\sim$ , wobei  $x \sim y$  falls  $x = y$  oder  $x, y \in 2\pi\mathbb{Z}$ . Dann ist die Quotientenmetrik (aus den Übungen) durch

$$d([x], [y]) = \min\{|x - y|, |x - 2\pi n| + |2\pi m - y| \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$$

Insbesondere findet man

$$\text{pr}^{-1}D_d(2\pi\mathbb{Z}, \epsilon) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} D(2\pi n, \epsilon)$$

sodass jede bezüglich  $d$  offene Umgebung von  $2\pi\mathbb{Z} \in \mathbb{R}/\sim$  eine solche Menge enthält. Die Quotiententopologie ist also deutlich feiner als die von dieser Metrik induzierte: Etwa ist auch das Bild von  $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} D(2\pi n, \frac{1}{|n|+1}) \subseteq \mathbb{R}$  in der Quotiententopologie offen.

Dieses Beispiel zeigt auch, dass Bilder offener Menge in einem Raum unter der Projektion auf einen Quotienten nicht unbedingt wieder offen sind, etwa das von  $D(n, 1)$  im gegebenen Beispiel nicht: Es gilt dann schließlich  $\text{pr}^{-1}(\text{pr}(D(n, 1))) = D(n, 1) \cup \mathbb{Z}$  und das ist sicher keine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}$ .

Nun zwei Beispiele, in denen keine solchen Schrecklichkeiten passieren, aber in denen Produkt-, Teilraum- und Quotiententopologie auf interessante Art alle miteinander interagieren. Das erste Beispiel greift die projektiven Räume aus dem ersten Abschnitt wieder auf.

**3.27. Konstruktion** Es sei  $K$  ein Körper und  $W$  ein endlich dimensionaler  $K$ -Vektorraum; man denke einfach an  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  und  $W = K^n$ , das ist schon interessant genug, macht aber nichts leichter. Dann setzen wir für  $k \in \mathbb{N}$

$$\text{Gr}_k(W) = \{U \subseteq V \mid U \text{ ist } K\text{-Untervektorraum von } W \text{ mit } \dim_K(U) = k\},$$

die  $k$ -te *Grassmann'sche* von  $W$ .

Ich hoffe ich muss nicht groß erklären, dass ihr Studium sich bei Problemen mit linear algebraischem Charakter sich als nützlich erweisen kann. Wir statten sie nun mit einer Topologie aus, wenn  $K$  ein topologischer Körper ist. Dafür setzen wir zunächst noch

$$\text{V}_k(W) = \{(x_1, \dots, x_k) \in W^k \mid x_1, \dots, x_k \text{ sind linear unabhängige}\},$$

die *Stiefel'sche* von  $W$ . Sie ist mit offenbar mit einer Topologie ausgestattet: In 3.20 hatten wir gesehen, dass  $W$  sich auf kanonische Weise zu einem topologischen  $K$ -Vektorraum machen lässt (via irgendeines Isomorphismus  $W \cong K^n$ ). Und wegen  $\text{V}_k(W) \subseteq W^k$  können wir die Stiefel'sche dann einfach mit der Unterraumtopologie der Produkttopologie ausstatten.

Der raison d'être der Stiefel'schen beim Topologisieren der Grassmann'schen ist dann die Abbildung

$$\langle - \rangle: \text{V}_k(W) \longrightarrow \text{Gr}_k(W), \quad (x_1, \dots, x_k) \longmapsto \langle x_1, \dots, x_k \rangle,$$

die einem Tupel den von ihm aufgespannten Unterraum zuordnet. Wir geben der Grassmann'sche die von ihr induzierte Topologie der Stiefel'schen. Man beachte, dass diese Abbildung nach dem Basisexistenzsatz der linearen Algebra wirklich surjektiv ist, sodass man hier wirklich im Wesentlichen die Quotiententopologie vor sich hat.

Die ersten Grassmann'schen haben noch einen gebräuchlicheren Namen: Es heißt  $\text{Gr}_1(W) = \mathbb{P}(W)$ , der *projektive Raum* von  $W$ . Und man setzt noch  $\mathbb{P}(K^n) = K\mathbb{P}^{n-1}$ ; die Indexverschiebung hier ist kein Tippfehler. Sie hat mit der Dimension dieser Räume zu tun, die wir (für  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ) erst im nächsten Kapitel definieren und berechnen werden.

**3.28. Bemerkung** Im Prinzip kann man bei all diesen Definition eine beliebigen topologischen Vektorraum  $W$  (oder gar Moduln) zulassen, und das ganze Prozedere durchführen. Für viele Zwecke sind dann die obigen Definition oft nicht ganz die richtigen: Meist möchte man dann als Punkte der Grassmann'schen nur die abgeschlossenen Unterräume zulassen, die auch noch ein abgeschlossenes Komplement besitzen oder ähnliches (man denke etwa an indiskrete Topologien, oder auch  $\mathbb{R}$  mit der euklidischen Topologie als  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum).

Um uns nicht in diesen Betrachtungen zu verlieren, belasse ich es beim obigen Fall, wo wir nur die kanonische Topologie auf einem endlich dimensionalen  $W$  zulassen.

**3.29. Beispiel** (1) Offenbar gilt  $\text{V}_k(W) = \emptyset$  wenn  $k > n$ , wo  $n = \dim_K(W)$ , und  $\text{V}_n(W) = \text{Iso}_K(K^n, W)$ ,  $\text{V}_0(W) = *$  und  $\text{V}_1(W) = W \setminus \{0\}$ . Insbesondere gelten  $\text{Gr}_0(W) = * = \text{Gr}_n(W)$ .

(2) Wir beobachten auch noch, dass  $\text{V}_k(W) \subseteq W^k$  offen ist, sobald nur  $\{0\} \subset K$  abgeschlossen: Via eines Isomorphismus  $W \cong K^n$ , reicht es  $K^n$  zu betrachten und hier ist nach dem Determinantenkriterium für lineare Unabhängigkeit

$$\text{V}_k(W) = \bigcup_{\substack{F \subset \{1, \dots, n\} \\ |F|=k}} \det_F^{-1}(K \setminus \{0\}),$$

wo  $\det_F: \text{Mat}(n \times k, K) \rightarrow K$  die Funktion ist, die die Zeilen außerhalb von  $F$  streicht und von der verbleibenden  $k \times k$ -Matrix die Determinante nimmt.

(3) Das erste interessante Beispiel ist  $\mathbb{R}\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ . Da jede Gerade in  $\mathbb{R}^2$  die obere Hälfte von  $S^1$  in genau einem Punkt schneidet, außer der horizontalen, die tuts in zweien, kann man wohl die Idee bekommen, dass  $\mathbb{R}\mathbb{P}^1$  ein Halbkreis mit zusammengeschlagenen

Endpunkten ist und damit homöomorph zu einem Kreis. Anstatt das nun mittels Umweg über 3.24 zu beweisen können wir einfach  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$  bemerken und die Abbildung

$$\mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow S^1, \quad x \longmapsto \frac{x^2}{|x|^2}$$

betrachten. Da für  $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$

$$\frac{(\lambda \cdot x)^2}{|\lambda x|^2} = \frac{x^2}{|x|^2}$$

gilt, liefert dies eine stetige Abbildung  $\varphi: \mathbb{R}P^1 \rightarrow S^1$ , von der man leicht prüft, dass sie bijektiv ist. Sie ist sogar ein Homöomorphismus: Ihre Umkehrabbildung ist durch  $z \mapsto \langle w \in \mathbb{C} \mid w^2 = z \rangle$  gegeben. Um zu sehen, dass das stetig ist, erinnere ich einmal daran, dass für  $z = x + iy$  die beiden komplexen Wurzeln von  $z$  durch

$$\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}} + i \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}}$$

und sein negatives gegeben sind, wenn  $y \geq 0$  und durch

$$\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}} - i \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}}$$

und sein negatives, wenn  $y \leq 0$ . Wir erhalten durch diese Formeln also stetige Abbildungen  $A_k \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  für  $k = 0, 1$ , wo  $A_k = \{(x, y) \in S^1 \mid (-1)^k y \geq 0\}$ , und die Kompositionen

$$A_k \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}P^1$$

sind offenbar die Einschränkungen der Umkehrabbildung von  $\varphi$ . Nach 3.25 ist diese also stetig, wie behauptet.

- (4) Für andere Werte von  $n$  und  $k$  ist  $\text{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$  aber nun ein wirklich neuer Raum, für den eine Intuition zu entwickeln Aufgabe der Topologievorlesungen sein wird (ein Prozess, den wir nicht in diesem Semester abschließen werden).

Wir beschreiben die Stiefel'sche und Grassmann'sche noch auf etwas andere Weise, die sich als nützlich entpuppen wird. Ganz analog zur Diskussion der topologischen Gruppe  $\text{GL}_n(K)$ , ist allgemein die Gruppe  $\text{Aut}_K(W)$  eine topologische Gruppe (und ein  $K$ -linearer Isomorphismus  $W \cong K^n$ , liefert natürlich auch einen  $\text{Aut}_K(W) \cong \text{GL}_n(K)$  als topologische Gruppen). Wir beobachten nun, dass  $\text{Aut}_K(W)$  auf der Stiefel'schen via

$$\text{Aut}_K(W) \times V_k(W) \longrightarrow V_k(W), \quad (\varphi, x_1, \dots, x_k) \longmapsto (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_k))$$

stetig operiert. Und die grundlegenden Sätze der linearen Algebra liefern, dass dies eine transitive Wirkung ist: Zwei linear unabhängige Ansammlungen von Vektoren  $(x_1, \dots, x_k)$  und  $(y_1, \dots, y_k)$  in  $W$ , kann man zu Basen ergänzen und dann gibt es genau eine  $K$ -linear Abbildung, die die eine Basis auf die andere abbildet.

**3.30. Satz** *Ist  $K$  ein topologischer Körper in dem  $\{0\}$  abgeschlossen ist,  $W$  ein endlich dimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $x_1, \dots, x_k \in W$  linear unabhängig. Dann induziert die stetige Abbildung*

$$\text{Aut}_K(W) \longrightarrow V_k(W), \quad \varphi \longmapsto (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_k))$$

einen Homöomorphismus

$$\text{Aut}_K(W)/\text{Stab}_x \longrightarrow V_k(W),$$

wo  $\text{Stab}_x = \{\varphi \in \text{Aut}_K(W) \mid \varphi(x_i) = x_i \text{ für alle } 1 \leq i \leq k\}$  der Stabilisator von  $x_1, \dots, x_k$  ist.

Für  $W = K^n$  mit  $e_1, \dots, e_k$  den ersten Einheitsvektoren, findet man unter der Identifikation  $\text{Aut}_K(K^n) = \text{GL}_n(K)$  zum Beispiel

$$\text{Stab}_e = \left\{ A \in \text{GL}_n(K) \mid A = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_k & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\}.$$

Ich erinnere auch daran, dass für eine Untergruppe  $H$  in einer Gruppe  $G$  die Menge  $G/H$ , der Orbitraum der Wirkung, einfach als  $G/\sim$  gegeben ist, wobei  $g \sim g'$  genau dann gelte,

wenn  $g \cdot (g')^{-1} \in H$  gilt. Das ist wirklich eine Äquivalenzrelation wie man leicht prüft und die Äquivalenzklassen sind genau die Mengen  $H \cdot g$ : Für ein  $h \in H$  ist ja schließlich  $g \cdot (h \cdot g)^{-1} = gg^{-1}h^{-1} = h^{-1} \in H$ , also  $g \sim gh$  und umgekehrt, wenn  $g \cdot (g')^{-1} \in H$  gilt, so haben wir  $g' = (g \cdot (g')^{-1})^{-1}g \in H \cdot g$ . Und ist  $G$  eine topologische Gruppe, so geben wir  $G/H$  immer die Quotiententopologie, insbesondere in obigem Satz.

Bevor wir zum Beweis kommen, noch das Analog für die Grassmann'schen: Es gibt natürlich ein Analog der Wirkung, nämlich

$$\text{Aut}_K(W) \times \text{Gr}_k(W) \longrightarrow \text{Gr}_k(W), \quad (\varphi, U) \longmapsto \varphi(U)$$

und diese ist wieder transitiv.

**3.31. Korollar** *Ist  $K$  ein topologischer Körper, in dem  $\{0\}$  abgeschlossen ist, und  $W$  ein endlich dimensionaler  $K$ -Vektorraum. Dann ist die gerade beschriebene Wirkung stetig und für jeden  $k$ -dimensionalen Unterraum  $U \subseteq W$  liefert die Abbildung*

$$\text{Aut}_K(W) \longrightarrow \text{Gr}_k(W), \quad \varphi \longmapsto \varphi(U)$$

einen Homöomorphismus

$$\text{Aut}_K(W)/\text{Stab}_U \longrightarrow \text{Gr}_k(W),$$

wo  $\text{Stab}_U = \{\varphi \in \text{Aut}_K(W) \mid \varphi(U) = U\}$  der Stabilisator von  $U$  ist.

Für  $W = K^n$  mit  $K^k \times \{0\} = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$  aufgespannt von den ersten Einheitsvektoren, findet man unter der Identifikation  $\text{Aut}_K(K^n) = \text{GL}_n(K)$  zum Beispiel

$$\text{Stab}_{K^k \times \{0\}} = \left\{ A \in \text{GL}_n(K) \mid A = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\},$$

wobei wie oben der obere linke Block eine  $k \times k$ -Matrix sein soll (was die Größe der andere Blöcke festlegt).

**BEWEIS VON 3.30.** Dass die angegebene Abbildung über den Quotienten faktorisiert ist hoffentlich klar, und auch die Injektivität ist im Wesentlichen per Definition richtig: Gilt  $\varphi(x_i) = \psi(x_i)$  für alle  $1 \leq i \leq k$ , so gilt offenbar auch  $\varphi \circ \psi^{-1}(x_i) = x_i$  und damit  $\varphi \circ \psi^{-1} \in \text{Stab}_x$ . Surjektivität folgt wie oben erklärt aus dem Basisergänzungssatz der linearen Algebra.

Und um zu prüfen, dass die Wirkung stetig ist, reicht es (nach Definition der Topologie auf  $W$  via Basiswahl!) zu prüfen, ob

$$\text{GL}_n(K) \times \text{V}_k(K^n) \longrightarrow \text{V}_k(K^n), \quad (A, x_1, \dots, x_k) \longmapsto (Ax_1, \dots, Ax_k)$$

stetig ist. Aber das dürfen wir nach Definition der Topologie auf  $\text{V}_k(K^n) \subseteq K^{nk}$  komponentenweise prüfen, und Matrixmultiplikation ist komponentenweise eine Kombination aus Addition und Multiplikation. Die sind nach Definition eines topologischen Körpers sicherlich stetig. Die Stetigkeit auf dem Quotienten folgt damit aus 3.22.

Bleibt wie schon in allen vorigen Beispielen noch die Stetigkeit der Umkehrabbildung zu prüfen und wieder reicht es das nach Konstruktion der Topologie auf  $W$  für  $\text{V}_k(K^n) \rightarrow \text{GL}_n(K)/\text{Stab}_x$  zu zeigen. Für diese Umkehrabbildung gibt es nun wieder keine natürliche Formel auf ganz  $\text{V}_k(K^n)$ . Aber diemal gibt es das auf einer offenen Überdeckung: Ist nämlich  $(y_1, \dots, y_k) \in \text{V}_k(K^n)$ , so ergänze dies durch irgendwelche  $z_{k+1}, \dots, z_n \in K^n$  zu einer Basis und betrachte

$$U_z = \{w \in \text{V}_k(K^n) \mid w_1, \dots, w_k, z_{k+1}, \dots, z_n \text{ ist eine Basis von } K^n\}.$$

Offenbar gilt  $y \in U_z$  und  $U_z$  ist offen in  $\text{V}_k(K^n)$ : Es gilt nämlich

$$U_z = [\det(-, z_{k+1}, \dots, z_n)]^{-1}(K \setminus \{0\}),$$

die Determinante ist sicherlich eine stetige Abbildung  $\det: \text{Mat}(n \times n, K) \rightarrow K$ , etwa ist sie via der Leibnizformel ja durch iterierte Addition und Multiplikation gegeben, das gleiche gilt dann für ihre Einschränkung  $\det(-, z_{k+1}, \dots, z_n): (K^n)^k \rightarrow K$  und per Annahme an die Topologie von  $K$  ist  $K \setminus \{0\}$  offen.

Aber dann können wir einfach das offensichtlich stetige

$$(-, z): U_z \rightarrow \text{GL}_n(K), \quad w \longmapsto (w_1, \dots, w_k, z_{k+1}, \dots, z_n)$$

betrachten (eine Matrix ist ja invertierbar genau dann, wenn ihre Spalten linear unabhängig sind!). Wählen wir uns nun irgendeinen Isomorphismus  $A \in \text{GL}_n(K)$  mit  $(x_1, \dots, x_k)$  als erste  $k$  Spalten (also  $A \cdot e_i = x_i$ ), so ist

$$U_z \xrightarrow{(-, z)} \text{GL}_n(K) \xrightarrow{- \cdot A^{-1}} \text{GL}_n(K) \longrightarrow \text{GL}_n(K)/\text{Stab}_x$$

offenbar immer noch stetig und stimmt mit der Einschränkung des Inversen auf  $U_z$  überein: Per Konstruktion hat man ja schließlich

$$(w_1, \dots, w_k, z_{k+1}, \dots, z_n) \cdot A^{-1} \cdot x_i = (w_1, \dots, w_k, z_{k+1}, \dots, z_n) \cdot e_i = w_i$$

für alle  $1 \leq i \leq k$ . Nun folgt die Stetigkeit der Inversen aus 3.25.  $\square$

**BEWEIS VON 3.31.** Hier ist das zweite Statement nun schon einfach: Dass man wieder ein Bijektion vor sich hat, geht genauso wie im vorigen Beweis und per definitionem ist die Topologie der Grassmann'schen von der Stiefel'schen koinduziert. Aber nach 3.30 ist diese wiederum von der Automorphismengruppe koinduziert, und ganz allgemein gilt für zwei Abbildungen  $f: X \rightarrow Y$  und  $g: Y \rightarrow Z$  schon  $(g \circ f)_! \mathcal{T} = g_!(f_! \mathcal{T})$  für jede Topologie  $\mathcal{T}$  auf  $X$ , wie man der Definition sofort entnimmt. Und dass die Topologie der Grassmann'schen von der Automorphismengruppe koinduziert ist, ist nur eine Umformulierung der Behauptung.

Es bleibt also noch die Stetigkeit der Wirkung zu besprechen (das hatte ich in der Vorlesung übersprungen). Die Subtilität ist hier, dass man mittels 3.22 aus der Stetigkeit der Wirkung von  $\text{Aut}_K(W)$  auf der Stiefel'schen sofort die Stetigkeit der induzierten Abbildung

$$[\text{Aut}_K(W) \times \text{V}_k(W)]/\sim \longrightarrow \text{Gr}_k(W)$$

erhält, wo  $(\varphi, U) \sim (\psi, V)$  wenn  $\varphi(U) = \psi(V)$  und wir eine stetige Bijektion

$$\text{Aut}_K(W) \times \text{Gr}_k(W) \longleftarrow [\text{Aut}_K(W) \times \text{V}_k(W)]/\sim$$

erhalten, aber uns erstmal niemand sagt, dass letztere auch ein stetiges Inverses hat (die Wirkung auf der Grassmann'schen lässt sich genau also die Komposition von Inversion und induzierter Abbildung schreiben).

Und im allgemeinen vertauschen Quotientenbildung und Produkte auch wirklich nicht, wie wir später in der Vorlesung diskutieren werden. Im gegebenen Beispiel aber schon, wegen folgendem Lemma und der anschließenden Diskussion.  $\square$

**3.32. Lemma** *Es sei  $f: X \rightarrow Y$  eine stetige, surjektive Abbildung topologischer Räume, derart, dass  $Y$  die von  $X$  via  $f$  koinduzierte Topologie trägt. Ist dann für jedes offene  $U \subseteq X$  auch  $f(U) \subseteq Y$  offen, so stimmt für jeden topologischen Raum  $Z$  die Produkttopologie auf  $Y \times Z$  mit der von der Produkttopologie auf  $X \times Z$  via  $f \times \text{id}_Z$  koinduzierten Topologie überein.*

Etwas vereinfacht: Das Produkt mit einem Quotienten stimmt mit dem Quotienten des Produkts überein, wenn die Quotientenbildung offen ist. Wir hatten in 3.26 gesehen, dass diese Bedingung nicht automatisch ist (und wir werden später noch im Detail analysieren, dass auch die Konklusion wirklich schiefgehen kann).

Aber für Untergruppen  $K \subseteq H \subseteq G$  schickt die Projektion  $\text{pr}: G/K \rightarrow G/H$  offene Mengen immer auf offene Mengen: Wir haben zu prüfen, dass für  $U \subseteq G/K$  offen auch

$$\text{pr}_H^{-1} \text{pr}(U) \subseteq G$$

offen ist. Aber  $U \subseteq G/K$  ist offen genau dann, wenn  $\text{pr}_K^{-1}(U) \subseteq G$  offen ist, damit ist auch  $g \cdot \text{pr}_K^{-1}(U) \subseteq G$  für jedes  $g \in G$  offen und scharfes Hinsehen zeigt

$$\text{pr}_H^{-1} \text{pr}(U) = \bigcup_{h \in H} h \cdot \text{pr}_K^{-1}(U),$$

was als Vereinigung offener Mengen dann ebenfalls offen ist.

**PROOF.** Es ist immer richtig, dass die Produkttopologie gröber ist als die koinduzierte: Das ist nach 3.22 äquivalent zur (offentlichen vorhandenen) Stetigkeit von  $f \times \text{id}: X \times Z \rightarrow Y \times Z$ . Bleibt also noch zu zeigen, dass wenn  $U \subseteq Y \times Z$  offen bezüglich der koinduzierten Topologie ist, dann

auch bezüglich der Produkttopologie. Sei also  $(y, z) \in U$ ; wir zeigen, dass  $U$  in der Produkttopologie eine Umgebung von  $(y, z)$  ist. Wähle  $x \in X$  mit  $f(x) = y$ . Nach Definition der koinduzierten Topologie ist  $f^{-1}(U)$  eine offene Umgebung von  $(x, z)$  bezüglich der Produkttopologie auf  $X \times Z$ . Das heißt es gibt offene  $x \in V \subseteq X$  und  $z \in W \subseteq Z$  mit  $V \times W \subseteq f^{-1}(U)$ . Aber per Annahme ist nun auch  $f(V) \subseteq Y$  offen, und damit  $f(V) \times W \subseteq Y \times Z$  bezüglich der Produkttopologie. Wegen  $(y, z) \in f(V) \times W \subseteq U$  folgt, dass  $U$  eine Umgebung von  $(y, z)$  ist.  $\square$

**3.33. Bemerkung** Die Bedingung dass  $\{0\} \subseteq K$  in einem topologischen Körper abgeschlossen ist, ist übrigens nur für die indiskrete Topologie falsch: Denn mit  $\{0\}$  ist in jedem topologischen Ring auch  $\overline{\{0\}}$  ein Ideal, sodass im Falle eines Körpers entweder  $\overline{\{0\}} = \{0\}$  (also  $\{0\}$  abgeschlossen) oder  $\overline{\{0\}} = K$  gelten muss. Aber daraus, dass  $K$  bezüglich der Addition eine topologische Gruppe ist, folgt dann auch  $\overline{\{x\}} = K$  für jedes  $x \in K$ , was impliziert, dass  $K$  die einzige nicht leere, abgeschlossene Teilmenge von  $K$  ist (also  $K$  indiskret).

Und für indiskrete Körper sind gelten die Schlüsse in 3.30 und 3.31 auch wirklich nicht.

Das zweite Beispiel betrifft unendliche Produkte diskreter Mengen. Hierzu setzen wir:

**3.34. Definition** Für  $n \geq 1$  sei  $C_n \subseteq [0, 1]$ , die  $n$ -te Cantormenge die Menge aller Zahlen, die eine  $(2n + 1)$ -adische Entwicklung ohne ungerade Ziffern besitzen.

Zum Beispiel enthält  $C_1$  sowohl 0 (mit 3-adischer Entwicklung  $0,000\dots$ ),  $\frac{1}{3}$  (mit den beiden 3-adischen Entwicklungen  $0,1000\dots = 0,0222\dots$ , von denen die rechts  $\frac{1}{3}$  qualifiziert),  $\frac{2}{3}$  (mit 3-adischer Entwicklung  $0,2000\dots$ ) und 1 (mit den beiden 3-adischer Entwicklungen  $1,000\dots$  und  $0,222\dots$ , wovon wieder die spätere zeigt, dass  $1 \in C_1$ ).

Allgemein kann man  $C_n$  wie folgt erhalten: Man teile  $[0, 1]$  gleichmäßig in  $2n + 1$  Intervalle ein, und entferne dann das Innere jedes zweiten dieser Intervalle, also  $\left] \frac{2k-1}{2n+1}, \frac{2k}{2n+1} \right[$  für  $1 \leq k \leq n$ . Dann nehme die verbleibenden  $n + 1$  Intervalle und verfähre genauso mit jedem von ihnen und iteriere diesen Prozess. Die Menge, die übrig bleibt ist die  $n$ -te Cantormenge. Jedenfalls ist sie irgendwie eine Punktwolke und kein kontinuierliches Gebilde (sie enthält zum Beispiel kein offenes Intervall), ist aber als Schnitt von abgeschlossenen Mengen sicher abgeschlossen.

**3.35. Satz** Es sei  $n \geq 1$ .

(1) Die Abbildung

$$\prod_{i \in \mathbb{N}_{\geq 1}} \{0, \dots, n\} \longrightarrow C_n, \quad x \longmapsto \sum_{k \geq 1} \frac{2x_k}{(2n+1)^k}$$

ist ein Homöomorphismus, wobei wir die Quelle mit der Produkttopologie über die diskrete Topologie auf  $\{0, \dots, n\}$  versehen sein.

(2) Die Abbildung

$$\prod_{i \in \mathbb{N}_{\geq 1}} \{0, \dots, n\} \longrightarrow [0, 1], \quad x \longmapsto \sum_{k \geq 1} \frac{x_k}{(n+1)^k}$$

induziert einen Homöomorphismus

$$\left[ \prod_{i \in \mathbb{N}} \{0, \dots, n\} \right] / \sim \longrightarrow [0, 1]$$

wo  $x \sim y$  falls  $x = y$  oder es  $a_1, \dots, a_m \in \{0, \dots, n\}$  mit  $a_m < n$  gibt derart, dass

$$x_i = \begin{cases} a_i & i \leq m \\ n & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad y_i = \begin{cases} a_i & i < m \\ a_m + 1 & i = m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

oder andersherum.

Die hier beschriebene Äquivalenzrelation ist die naheliegende Verallgemeinerung der Tatsache  $0,0999\dots = 0,1$  im Dezimalsystem (dem Fall  $n = 9$ ). Es ist hoffentlich hinreichend erstaunlich, dass die überabzählbare Punktvolke  $C_n$  sich durch abzählbar viele (!) Identifikationen in das offenbar kontinuierliche Intervall überführen lässt.

PROOF. Den zweiten Teil will ich hier nicht beweisen; er wird Übungsaufgabe sein.

Die obere Abbildung ist offenbar per Definition von  $C_n$  surjektiv. Zeigen wir als nächstes die Injektivität. Since also  $x \neq y \in \prod_{i \in \mathbb{N}_{\geq 1}} \{0, \dots, n\}$ , so sei  $l \in \mathbb{N}$  die kleinste Zahl mit  $x_l \neq y_l$ . Aber dann gilt

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k \geq 1} \frac{2x_k}{(2n+1)^k} - \sum_{k \geq 1} \frac{2y_k}{(2n+1)^k} \right| = \left| \sum_{k \geq l} \frac{2(x_k - y_k)}{(2n+1)^k} \right| \geq \left| \frac{2(x_l - y_l)}{(2n+1)^l} \right| - \left| \sum_{k > l} \frac{2(x_k - y_k)}{(2n+1)^k} \right| \\ & \geq \frac{2}{(2n+1)^l} - \left| \sum_{k > l} \frac{2n}{(2n+1)^k} \right| = \frac{2}{(2n+1)^l} - \frac{2n}{(2n+1)^{l+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{2n+1}} = \frac{2}{(2n+1)^l} - \frac{1}{(2n+1)^l} = \frac{1}{(2n+1)^l} \end{aligned}$$

insbesondere können die Bilder nicht übereinstimmen. Nun zur Stetigkeit. Nach dem Satz von Fréchet 3.13 ist die Quelle ein metrisierbarer Raum, ergo reicht es anstatt Stetigkeit Folgenstetigkeit nachzuweisen (das werden wir im übernächsten Kapitel auch noch einmal in etwas größerer Allgemeinheit überlegen). Aber ist  $m \mapsto x^{(m)}$  eine Folge mit Grenzwert  $x$ , so strebt für jedes  $i \in \mathbb{N}$  die Folge  $i \rightarrow x_i^{(m)}$  für fixes  $m$  gegen  $x_i$ , was aufgrund der diskreten Topologie auf  $\{0, \dots, n\}$  wiederum bedeutet, dass  $x_i^{(m)} = x_i$  für alle groß genug  $m$ . Betrachten wir nun aber nur endlich viele Stellen, etwa die ersten  $l$ , so folgt, dass es ein  $j \in \mathbb{N}$  gibt, so dass

$$x_i^{(m)} = x_i \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq l \text{ und } m \geq j.$$

Aber dann folgt

$$\left| \sum_{k \geq 1} \frac{2x_k^{(m)}}{(2n+1)^k} - \sum_{k \geq 1} \frac{2x_k}{(2n+1)^k} \right| = \left| \sum_{k > l} \frac{2(x_k^{(m)} - x_k)}{(2n+1)^k} \right| \leq \left| \sum_{k > l} \frac{2n}{(2n+1)^k} \right| = \frac{1}{(2n+1)^{l+1}}$$

was bei wachsendem  $l \in \mathbb{N}$  beliebig klein wird, sodass die Bildfolge der  $x^{(m)}$  gegen das Bild von  $x$  konvergiert.

Um schließlich zu sehen, dass es sich um einen Homöomorphismus handelt, zeigen wir, dass offene Mengen auf offene Mengen abgebildet werden. Dafür beobachten wir, dass die Mengen

$$U_a = \left\{ x \in \prod_{i \in \mathbb{N}_{\geq 1}} \{0, \dots, n\} \mid x_i = a_i \text{ für alle } 1 \leq i \leq m \right\}$$

für  $a_1, \dots, a_m$  eine Basis der Produkttopologie bilden. Es reicht also, ihre Bilder als offen in  $C_n$  nachzuweisen. Dazu müssen wir zeigen, dass es zu jedem  $x \in U_a$  ein  $\epsilon > 0$  gibt, sodass der Schnitt von  $D\left(\sum_{k \geq 0} \frac{2x_k}{(2n+1)^k}, \epsilon\right) \cap C_n$  immer noch im Bild von  $U$  liegt. Aber ist  $w \in \prod_{i \in \mathbb{N}_{\geq 1}} \{0, \dots, n\}$  derart, dass sein Bild nicht im Bild von  $U_a$  liegt, so muss es ein kleinstes  $1 \leq l \leq m$  geben mit  $w_l \neq a_l = x_l$ . Aber dann folgt mit der Rechnung für die Injektivität schon, dass

$$\left| \sum_{k \geq 0} \frac{2w_k}{(2n+1)^k} - \sum_{k \geq 0} \frac{2x_k}{(2n+1)^k} \right| = \left| \sum_{k \geq l} \frac{2(w_k - x_k)}{(2n+1)^k} \right| \geq \frac{1}{(2n+1)^l} \geq \frac{1}{(2n+1)^m},$$

sodass  $\epsilon = \frac{1}{(2n+1)^m} > 0$  das gewünschte leistet.  $\square$

**3.36. Bemerkung** Zum Schluss noch drei wissenswerte Beobachtungen über Cantormengen:

- (1) Die Teilmengen  $C_n \subseteq [0, 1]$  sind alle zueinander homöomorph, sogar stärker: Es gibt Homöomorphismen  $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , die  $C_n$  auf  $C_m$  bewegen. Da  $C_n$  abgeschlossen ist (und  $0, 1 \in C_n$ ) ist  $[0, 1] \setminus C_n$  offen in  $\mathbb{R}$  und deshalb abzählbare Vereinigung von Intervallen. Sei  $\mathcal{I}_n$  die Menge dieser Intervalle, dann erbt  $\mathcal{I}_n$  offenbar eine Ordnung von  $[0, 1]$ . Nun brauchen wir einen Fakt aus der Theorie der Ordnungen: Je zwei abzählbare, dicht geordnete Mengen ohne größtes und kleinstes Element sind ordnungsisomorph ( $\mathbb{Q}$  ist das kanonische Beispiel); dicht geordnet heißt hier total geordnet und zu je zwei Elementen

$x < y$  gibt es ein weiteres mit  $x < z < y$ . Nun prüft man leicht, dass  $\mathcal{I}_n$  eben abzählbar und dicht geordnet ist, und wählt eine ordnungserhaltende Bijektion  $f: \mathcal{I}_n \rightarrow \mathcal{I}_m$ . Daraus erhält man eine eindeutige Abbildung  $[0, 1] \setminus C_n \rightarrow [0, 1] \setminus C_m$ , die jedes maximale offene Intervall  $I$  der linken Seite linear, monoton und bijektiv auf  $f(I)$  abbildet. Nach 3.25 ist sie stetig. Man prüft nun elementar aber mit etwas Aufwand, dass sie sich eindeutig zu einem Homöomorphismus des Intervalls fortsetzt, indem man einfach die Endpunkt von  $\bar{I}$  auf die Endpunkte von  $\overline{f(I)}$  abbildet.

- (2) Und vielleicht noch überraschender ist auch ein Produkt zweier Cantormengen wieder homöomorph zu einer Cantormenge: Dass folgt sofort aus der unendlichen Produktdarstellung 3.35 und Cantors Diagonalsatz. Sogar für abzählbare Produkte ist das richtig!
- (3) Und noch etwas macht die Produktdarstellung recht transparent: Zu je zwei Sätzen von  $n$  verschiedenen Punkten  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in C_m$  gibt es einen Homöomorphismus  $f: C_m \rightarrow C_m$  mit  $f(x_i) = y_i$  für alle  $1 \leq i \leq n$ : Ersetzen wir nämlich  $C_m$  durch  $\prod_{i \geq 1} \{0, \dots, m\}$  so gibt es ein  $l \geq 0$ , sodass sich die  $x_i$  und die  $y_i$  jeweils schon in ihren ersten  $l$ -Einträgen irgendwo unterscheiden. Dann können wir eine Bijektion von  $\sigma: \{0, \dots, m\}^l \rightarrow \{0, \dots, m\}^l$  wählen mit  $\sigma((x_i)_{\leq l}) = (y_i)_{\leq l}$ : Auf den  $(x_i)_{\leq l}$  ist  $\sigma$  ja dann festgelegt und nach Wahl von  $l$  gilt

$$|\{0, \dots, m\}^l \setminus \{(x_1)_{\leq l}, \dots, (x_n)_{\leq l}\}| = (m+1)^l - n = |\{0, \dots, m\}^l \setminus \{(y_1)_{\leq l}, \dots, (y_n)_{\leq l}\}|,$$

sodass wir uns zwischen den äußeren beiden Mengen irgendeine Bijektion aussuchen können. Bezeichnet dann  $\tau_{i,j} \in \Sigma_m$  die Transposition die  $i \neq j \in \{0, \dots, m\}$  vertauscht, so ist

$$f: \prod_{i \geq 1} \{0, \dots, m\} \longrightarrow \prod_{i \geq 1} \{0, \dots, m\}, \quad a \longmapsto \left[ i \mapsto \begin{cases} \sigma(a_{\leq l})_i & i \leq l \\ \tau_{(x_k)_{\leq l}, (y_k)_{\leq l}}(a_i) & i > l \text{ und } a_{\leq l} = (x_k)_{\leq l} \\ a_i & \text{sonst} \end{cases} \right]$$

der gesuchte Homöomorphismus (die Überprüfung der Stetigkeit überlasse ich einmal dem Leser).

Für einzelne Elemente  $x, y \in C_1$  gibt es immer noch einen Homöomorphismus von  $[0, 1]$  der  $x$  und  $y$  vertauscht, aber nach dem Zwischenwertsatz kann es zum Beispiel keinen Homöomorphismus  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  mit der die drei Elemente  $0, 1/3, 1 \in C_1$  auf  $0, 1, 1/3$  abbildet. Ein solcher Homöomorphismus von  $C_1$  ist im reellen Bild von  $C_1$  gar nicht leicht zu finden.

#### 4. Trennungseigenschaften

In den Beispielen (und den Übungen) haben wir schon einige Probleme mit ganz allgemeinen Topologien gesehen: Etwa können Folgen in einem topologischen Raum mehr als einen Grenzwert haben. Der extremste Fall ist die indiskrete Topologie: Hier konvergiert jede Folge gegen jeden Grenzwert.

Wir wollen solches Verhalten ausschließen. Dazu benutzt man folgende Eigenschaft, die Hausdorff sogar ursprünglich in die Axiome einer Topologie eingebaut hatte.

**4.1. Definition** Ein topologischer Raum  $X$  heißt *hausdorff'sch*, wenn es zu allen  $x \neq y \in X$  offene Mengen  $U, V \subseteq X$  gibt mit

$$x \in U, \quad y \in V \quad \text{und} \quad U \cap V = \emptyset.$$

**4.2. Beispiel** Die Topologie  $\mathcal{O}_d$  einer Pseudometrik ist genau dann hausdorff'sch, wenn  $d$  eine Metrik ist: Für eine Metrik  $d$ , kann man gemäß Dreiecksungleichung

$$U = D_d\left(x, \frac{d(x,y)}{2}\right) \quad \text{und} \quad V = D_d\left(y, \frac{d(x,y)}{2}\right)$$

wählen, da dann per Annahme  $d(x,y) > 0$  gilt.

Und gilt umgekehrt  $d(x,y) = 0$ , so gilt offenbar  $x \in D_d(y, \epsilon)$  und damit auch  $x \in U$ , wann immer  $U$  eine Umgebung von  $y$  ist, sodass es kein  $V$  wie gewünscht geben kann.

Kopieren wir nun das Argument vom Falle metrischer Räume, so erhalten wir:

**4.3. Lemma** *Wenn  $X$  ein hausdorff'scher topologischer Raum ist, so hat jede Folge in  $X$  höchstens einen Grenzwert.*

PROOF. Denn hat eine Folge  $f: \mathbb{N} \rightarrow X$  den Grenzwert  $x \in X$  und  $x \neq y \in X$ , so können wir uns offene Menge  $U, V \subseteq X$  wie von Hausdorff garantiert hernehmen. Wegen der Konvergenz gilt dann  $f_n \in U$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ . Aber wegen  $U \cap V = \emptyset$  können dann nur endlich viele Folgenglieder von  $f$  in  $V$  liegen, sicherlich also nicht fast alle. Und damit konvergiert  $f$  nicht gegen  $y$ .  $\square$

**4.4. Lemma** *Ist  $X$  ein Hausdorffraum, so ist  $\{x\} \subseteq X$  abgeschlossen für jedes  $x \in X$ . Folglich ist für jede stetige Abbildung  $f: Y \rightarrow X$  die Menge*

$$f^{-1}(x) = \{y \in Y \mid f(y) = x\}$$

*abgeschlossen in  $Y$ .*

PROOF. Ist  $y \in X \setminus \{x\}$  so wähle  $U, V \subseteq X$  wie in der Definition. Dann gilt sicherlich  $V \subseteq X \setminus \{x\}$  und damit ist  $X \setminus \{x\}$  offen in  $X$ .  $\square$

Etwas stärker gilt, dass für eine zweite stetige Abbildungen  $g: Y \rightarrow X$  auch die Menge  $\{y \in Y \mid f(y) = g(y)\} \subseteq Y$ , der Egalisator von  $f$  und  $g$ , abgeschlossen ist; das, und auch dass diese stärkere Aussage Hausdorffräume charakterisiert, werden sie in den Übungen nachweisen.

Es ist also hoffentlich klar, dass die Hausdorffeigenschaft eine wünschenswerte ist.

**4.5. Beispiel** (1) Teilräume von Hausdorffräumen sind offenbar wieder Hausdorffräume: Man schneide die Mengen  $U$  und  $V$  aus der Definition einfach mit dem Teilraum.

Allgemeine induzierte Topologien sind natürlich nicht wieder hausdorff'sch: Etwa induziert die Abbildung  $X \rightarrow *$  immer die indiskrete Topologie auf  $X$  und diese ist sicher nicht hausdorff'sch, sobald  $X$  auch nur zwei Punkte hat.

- (2) Produkte von Hausdorffräumen sind wieder Hausdorffräume: Sind  $x \neq y \in \prod_{i \in I} X_i$ , so gibt es ein  $j \in I$  mit  $x_j \neq y_j$ , nach Annahme gibt es dann  $U, V \subseteq X_i$  mit  $x_j \in U, y_j \in V$  und  $U \cap V = \emptyset$ . Und dann sind

$$U \times \prod_{j \neq i \in I} X_j \quad \text{und} \quad V \times \prod_{j \neq i \in I} X_j$$

disjunkte offenen Umgebungen von  $x$  und  $y$ , wie gesucht.

Es folgt etwa, dass die Topologie der punktweisen Konvergenz auf  $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  hausdorff'sch ist.

- (3) Jede Topologie die feiner ist als eine hausdorff'sche ist offenbar selber wieder hausdorff'sch.
- (4) Quotienten von Hausdorffräumen sind nicht unbedingt wieder Hausdorffsch und im allgemeinen ist es eine ziemlich subtile Frage zu entscheiden, wann Quotienten wieder hausdorff'sch sind. Als ganz simples Beispiel hatten wir in 3.23 ja gesehen, dass der Sierpinskierraum als Quotient eines Intervalls auftaucht.
- (5) Die koendliche Topologie auf einer unendlichen Menge und die koabzählbare Topologie auf einer überabzählbaren Mengen haben überhaupt keine nicht-leeren disjunkten offenen Menge, sind also sicherlich nicht hausdorff'sch.

Folgendes Kriterium ist immer mal wieder hilfreich (sie werden es in den Übungen beweisen):

**4.6. Satz** *Für eine topologische Gruppe  $G$  und eine Untergruppe  $H \subseteq G$  ist der Faktorraum  $G/H$  genau dann hausdorff'sch, wenn  $H \subseteq G$  abgeschlossen ist. Insbesondere ist  $G$  selbst hausdorff'sch genau dann, wenn  $\{e\} \subseteq G$  abgeschlossen ist, wo  $e$  das neutrale Element bezeichnet.*

**4.7. Beispiel** (1) Zum Beispiel ist es nun leicht zu sehen, dass  $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  mit der Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz hausdorff'sch ist: Ist  $0 \neq f$  eine stetige Abbildung

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , so gilt  $f(x) \neq 0$  für ein  $x \in \mathbb{R}$ . Wählen wir dann ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq |x|$  so folgt  $\|f\|_{[-n,n]} > 0$  und damit gilt

$$0 \notin D_{\|\cdot\|_{[-n,n]}}(f, \|f\|_{[-n,n]})$$

und die rechte Seite ist per Definition eine offene Umgebung von  $f$ . Also ist  $C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$  offen.

- (2) Auch dass die Grassmann'schen von einem hausdorff'schen topologischen Körper wieder hausdorff'sch sind, folgt nun sofort aus 3.31.

Im allgemeinen reicht die Eigenschaft, dass es alle Punkte eines Raumes abgeschlossen sind, nicht dafür aus, dass er hausdorff'sch ist (oder auch nur, dass Folgen höchstens einen Grenzwert haben). Anstatt ein Gegenbeispiel in Isolation zu geben benutze ich die Gelegenheit die Hausdorff'eigenschaft als nur einen Fall einer ganzen Hierarchie von Trennungseigenschaften zu erkennen. Ich liste einmal der Vollständigkeit halber die bekanntesten; sie sind alle für den ein oder anderen Zweck relevant, werden uns aber in der Vorlesung kaum beschäftigen.

**4.8. Definition** Ein topologischer Raum  $X$  heißt

- T0 wenn es zu je zwei Punkten  $x \neq y \in X$  ein offenes  $U \subseteq X$  gibt, das genau einen der beiden Punkte  $x$  und  $y$  enthält,
- T1 wenn es zu je zwei Punkten  $x \neq y \in X$  ein offenes  $U \subseteq X$  gibt mit  $x \in U$  und  $y \notin U$ ,
- T2 wenn es zu je zwei Punkten  $x \neq y \in X$  disjunkte offene  $U, V \subseteq X$  gibt mit  $x \in U$  und  $y \in V$  gibt (das ist also genau die Hausdorff'eigenschaft),
- T3 wenn es zu jedem Punkt  $x \in X$  und jedem abgeschlossen  $A \subseteq X$  disjunkte offene  $U, V \subseteq X$  mit  $x \in U$ ,  $A \subseteq V$ ,
- T4 wenn es zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Mengen  $A, B \subseteq X$  disjunkte offene  $U, V \subseteq X$  mit  $A \subseteq U$  und  $B \subseteq V$  gibt, und
- T5 wenn es je zu zwei Mengen  $A, B \subseteq X$  mit  $A \cap \bar{B} = \emptyset = \bar{A} \cap B$  disjunkte offene  $U, V \subseteq X$  gibt mit  $A \subseteq U$  und  $B \subseteq V$ .

Und weil die letzten drei Axiome die früheren nicht implizieren sagt man noch ein Raum  $X$  sei *regulär*, wenn er T2 und T3 erfüllt, *normal*, wenn er T2 und T4 erfüllt, und *vollständig normal*, wenn er T2 und T5 erfüllt.

Es gibt noch einen ganzen weiteren Zoo an solchen Axiomen (etwa  $T2\frac{1}{2}$  und  $T3\frac{1}{2}$ ), aber ich will darüber hier gar nicht wirklich reden. Und zu erwähnen ist auch noch, dass manche Autoren die Begriffe T3 und regulär genau umgekehrt benutzen als ich das hier tue und ähnlich dann mit normal und vollständig normal (sodass, dann immer  $T(i+1) \Rightarrow T_i$  gilt); beide Konventionen haben ihre Vor- und Nachteile.

Es ist nun jedenfalls jeder metrische Raum sogar ein T5-Raum (und damit weil hausdorff'sch sogar vollständig normal), man nehme

$$U = \{x \in X \mid d(x, A) < d(x, B)\} \quad \text{und} \quad V = \{x \in X \mid d(x, B) < d(x, A)\}.$$

Aber keines der Axiome impliziert ein späteres:

- 4.9. Beispiel**
- (1) Die indiskrete Topologie auf einer mehrelementigen Menge ist nicht einmal T0.
  - (2) Die Alexandrov-Topologie einer Präordnung erfüllt nur T1 wenn sie zur Gleichheitsrelation gehört, aber zum Beispiel schon T0 für jede partielle Ordnung. Etwas ist der Sierpinski-Raum T0 aber nicht T1.
  - (3) Die koendliche Topologie auf einer unendlichen Menge ist T1 aber nicht T2 (hausdorff'sch) und Folgen haben hier auch wirklich nicht nur einen Grenzwert, wie wir in den Übungen gesehen haben.
  - (4) Als vielleicht einfachstes Beispiel eines Hausdorffraums, der nicht T3 erfüllt, nehme man die euklidische Topologie von  $\mathbb{R}$  und erkläre auch noch die Menge  $F = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$  als abgeschlossen (nehme also die von  $\mathbb{R} \setminus F$  und den euklidisch offenen Mengen erzeugte Topologie, manchmal Smirnov-Topologie genannt). Das ist feiner als die euklidische also

erst recht hausdorffsch, aber das neuerdings abgeschlossene  $F$  lässt sich von 0 nicht durch offene Umgebungen trennen.

- (5)  $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  mit der punktweisen Topologie ist T3 aber nicht T4: Allgemein vererbt sich T3 nach einem zu 4.5 ganz ähnlichen Argument genau wie die Hausdorffeigenschaft auf beliebige Produkte.

Ein Beispiel von zwei abgeschlossenen Mengen, die sich nicht durch offene trennen lassen ist gegeben durch

$$\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z} \mid \exists x \in \mathbb{R} \text{ mit } f(x) \in \{2, 4, 6, \dots\} \text{ und } f(y) = -1 \text{ für alle } y \neq x\}$$

und

$$\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z} \mid \exists x \in \mathbb{R} \text{ mit } f(x) \in \{1, 3, 5, \dots\} \text{ und } f(y) = -1 \text{ für alle } y \neq x\},$$

aber das ist nicht ganz leicht einzusehen.

- (6)  $F(\mathbb{R}, [0, 1])$  mit der punktweisen Topologie ist T4 aber nicht T5. Hier ist schon der Beweis der T4 Eigenschaft nicht ganz einfach, sie folgt zum Beispiel aus dem Satz von Tychonov, den wir später beweisen und dem allgemeinen Fakt, dass kompakte Hausdorffräume immer T4 sind. Zwei separierte Mengen, die sich nicht durch offene Umgebungen trennen lassen, sind

$$\{f: \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\} \mid f(q) = 1 \text{ für alle } q \in \mathbb{Q} \text{ und } f(x) = 0 \text{ für genau ein } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$$

und

$$\{f: \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\} \mid f(x) = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ und } f(q) = 1 \text{ für genau ein } q \in \mathbb{Q}\}.$$

Wie gesagt will ich hier nicht wirklich weiter auf den Sinn dieser spezifischen Trennungsaxiome eingehen. Hier nur ein ganz simpler Spezialfall: Betrachtet man auf einem topologischen Raum  $X$  für ein  $A \subseteq X$  den Raum  $X/A$ , so kann sicherlich  $X/A$  höchstens dann T1 sein, wenn  $A$  abgeschlossen ist. Man könnte also hoffen, dass  $X/A$  wieder hausdorff'sch ist, wenn  $X$  das ist und  $A$  abgeschlossen. Ist es aber leider im Allgemeinen nicht: Ein Raum ist genau dann T3, wenn  $X/A$  für jedes abgeschlossene  $A$  wieder hausdorff'sch ist. Aber T3 muss  $X/A$  auch dann noch nicht sein, sodass man die Hausdorffeigenschaft verlieren kann, wenn man nur  $X/A, B$  betrachtet. Ein Raum ist T4 genau dann, wenn dies für je zwei disjunkte abgeschlossene Mengen stimmt oder äquivalent wenn für jede endliche Ansammlung von disjunkten abgeschlossenen Teilmengen  $A_1, \dots, A_n \subseteq X$  der Raum  $X/A_1, \dots, A_n$  wieder hausdorff'sch ist, und dann ist dieser Quotient sogar wieder T4. Und ein Raum ist T5, wenn jeder seiner Teilräume T4 ist. Selbst wenn man also nur an der Hausdorffeigenschaft interessiert ist, stolpert man über die anderen Trennungseigenschaften. Sie haben aber auch noch viel subtilere Zwecke.

## 5. Die Abzählbarkeitsaxiome

Unser erstes Problem mit Folgen, die Konvergenz zu mehreren Grenzwerten, wissen wir nun also auszuschließen. Ein zweites Problem haben wir auch in den Übungen schon gesehen: Eine Menge ist nicht unbedingt abgeschlossen, wenn sie unter der Konvergenz von Folgen abgeschlossen ist, wie das noch in metrischen Räumen der Fall ist (einfachste Beispiel hierfür war die koabzählbare Topologie auf einer überabzählbaren Menge, wir werden gleich noch interessantere Beispiele sehen). Um dieses Problem genauer zu analysieren bedürfen wir noch einer Definition:

**5.1. Definition** Ist  $X$  ein topologischer Raum,  $x \in X$  so heißt eine Teilmenge  $N \subseteq \mathcal{P}(X)$  eine *Umgebungsbasis* von  $x$ , wenn alle Elemente von  $N$  Umgebungen von  $x$  sind, und für jede Umgebung  $U \subseteq X$  von  $x$  noch ein  $v \in N$  existiert mit  $V \subseteq U$ .

Man kann natürlich auch Umgebungssubbasen definieren (und mit ihnen Nachbarschaftssysteme erzeugen), indem man hier nur  $V_1 \cap \dots \cap V_n \subseteq U$  für eine Ansammlung  $V_1, \dots, V_n \in N$  fordert, aber das werden wir nicht brauchen.

**5.2. Definition** Ein topologischer Raum  $X$  heißt *erstabzählbar*, wenn jeder Punkt von  $X$  eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt und *zweitabzählbar*, wenn er eine abzählbare Basis besitzt.

Da die Menge der endlichen Schnitte einer abzählbaren Ansammlung von Mengen wieder abzählbar ist, reicht es für Zweitabzählbarkeit auch eine abzählbare Subbasis zu haben (und ähnlich für Umgebungs-subbasen).

- 5.3. Beispiel** (1) Die Topologie  $\mathcal{O}_d$  einer Pseudometrik  $d$  auf  $X$  ist immer erstabzählbar: Für einen Punkt  $x \in X$  bilden die  $D_d(x, \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}$  eine abgezählte Umgebungsbasis.
- (2) Jeder zweitabzählbare topologische Raum ist offenbar auch erstabzählbar.
- (3) Die euklidische Topologie auf dem  $\mathbb{R}^n$  hat die rationalen Kugeln mit rationalem Radius nach einer Aufgabe vom ersten Zettel als Basis und ist demzufolge sogar zweitabzählbar. Das stimmt aber nicht für jeden metrischen Raum: Etwa ist die diskrete Topologie auf einer Menge  $X$  genau dann, zweitabzählbar wenn  $X$  selbst abzählbar ist: Es muss dann ja schließlich jede der Mengen  $\{x\}$  in jeder Basis liegen.
- (4) Sowohl Erst- als auch Zweitabzählbarkeit vererben sich auf Teilräume und (nach Kantors Diagonalsatz) auf abzählbare Produkte. Kein Raum, der einen überabzählbaren diskreten Teilraum hat, kann also zweitabzählbar sein. Zum Beispiel liefert jede Funktion  $\mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}$  durch lineare Interpolation eine stetige Funktion  $\mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  und je zwei verschiedene solche haben Abstand 1 in der Supremumsmetrik, liefern also einen diskreten Unterraum in  $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  bezüglich der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz. Dieser ist also erstabzählbar (weil metrisch), aber nicht zweitabzählbar; er ist zu groß.
- (5) Die Topologie der punktweise Konvergenz auf  $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  ist nicht einmal erstabzählbar, wie sie in den Übungen zeigen werden müssen.

Die Zweitabzählbarkeit ist in gewisser Weise ein globale Kleinheitsbedingung und wir werden in dieser Vorlesung voraussichtlich nicht viel mit ihr machen. Die Erstabzählbarkeit hingegen liefert die gewünschte Interaktion von Folgen und Abgeschlossenheit.

Zunächst beobachten wir einmal, dass für  $A \subseteq X$  und eine Folge  $f: \mathbb{N} \rightarrow A$ , die gegen  $x \in X$  konvergiert, auf jeden Fall  $x \in \bar{A}$  gilt: Denn per Definition enthält ja dann jede Umgebung von  $x$  unendlich viele Folgenglieder von  $f$ , also mal mindestens einen Punkt aus  $A$ . Eine Menge, die unter Konvergenz von Folgen abgeschlossen ist, nennen wir *sequentiell abgeschlossen*.

Und für eine stetige Abbildung  $g: X \rightarrow Y$  zwischen zwei topologischen Räumen ist mit  $f$  auch die Folge  $g \circ f$  konvergent, und zwar gegen  $g(x)$ : Denn ist  $U \subseteq Y$  eine Umgebung von  $g(x)$ , so ist per Definition  $g^{-1}(U)$  eine von  $x$ , enthält also fast alle Folgenglieder von  $f$  und damit enthält  $U$  fast alle von  $g \circ f$ . Eine Abbildung mit dieser Eigenschaft nennt man allgemein *folgenstetig*. Das ist übrigens genau dann der Fall, wenn Urbilder sequentiell abgeschlossener Mengen wieder sequentiell abgeschlossen sind, was ich aber einmal dem Leser überlasse zu beweisen (es nicht völlig offensichtlich).

Es ist nun eben im allgemeinen nicht jede sequentiell abgeschlossene Menge wirklich abgeschlossen und nicht jede folgenstetig Abbildung stetig, wie das noch bei metrischen Räumen der Fall ist (als Beispiel nehmen man etwa die Identität als Abbildung einer überabzählbaren Menge versehen mit der koabzählbaren Topologie in der Quelle und der diskreten Topologie im Ziel; ein interessanteres Beispiel gebe ich unten). Wir haben nun jedenfalls:

**5.4. Satz** *Ist  $X$  ein erstabzählbarer topologischer Raum und  $A \subseteq X$  abgeschlossen, und  $f: X \rightarrow Y$  eine Abbildung in einen anderen topologischen Raum  $Y$ . Dann gilt:*

- (1) *Ist  $x \in \bar{A}$ , so gibt es eine Folge  $f: \mathbb{N} \rightarrow A$ , die in  $X$  gegen  $x$  konvergiert,*
- (2) *ist  $A$  sequentiell abgeschlossen, so ist  $A$  abgeschlossen, und*
- (3) *ist  $f$  folgenstetig, so ist  $f$  stetig.*

PROOF. Für den ersten Punkt, wähle man ein abgezählte Umgebungen  $N_i \subseteq X$  von  $x$ , die eine Umgebungsbasis bilden. Wegen  $x \in \bar{A}$  muss für jede Umgebung  $V$  von  $x$  schon  $V \cap A \neq \emptyset$  gelten. Wir können uns also für jedes  $i \in \mathbb{N}$  einen Punkt in  $N_1 \cap \dots \cap N_i \cap A$  wählen und erhalten so eine Folge  $f: \mathbb{N} \rightarrow A$ . Ich behaupte, dass  $f$  gegen  $x$  konvergiert. Ist nämlich  $V$  eine Umgebung von  $x$ , so gibt es per Definition ja ein  $i \in \mathbb{N}$  mit  $N_i \subseteq V$  und für  $k \geq i$  gilt dann  $f_k \in N_i \subseteq V$ , wie gewünscht.

Die zweite Behauptung folgt offenbar aus der ersten.

Für die dritte nehmen wir uns eine abgeschlossene Menge  $B \subseteq Y$  her. Wir zeigen, dass  $f^{-1}(B)$  dann sequentiell abgeschlossen ist, dann liefert der zweite Punkt, was wir wollen. Ist aber  $g: \mathbb{N} \rightarrow f^{-1}(B)$  eine Folge mit Grenzwert  $x \in X$ . Dann konvergiert per Annahme auch  $f \circ g: \mathbb{N} \rightarrow B$  gegen  $f(x)$ . Aber als abgeschlossene Menge ist  $B$  natürlich auch sequentiell abgeschlossen, also  $f(x) \in B$  und damit  $x \in f^{-1}(B)$ .  $\square$

Nun ein interessantes Beispiel, das zeigt, dass Folgenstetigkeit auch wirklich in relevanten Situationen schwächer ist als Stetigkeit:

**5.5. Beispiel** Man statt  $C([0, 1], [-1, 1])$  einmal mit der Topologie der punktweisen Konvergenz in der Quelle aus und einmal mit der von der  $L^1$ -Metrik

$$(f, g) \mapsto \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt$$

induzierten Topologie im Ziel aus. Dann sagt der Lebesgue'sche Satz von der dominierten Konvergenz, dass die Identität folgenstetig ist. Aber für  $\epsilon > 0$  enthält die Menge

$$\left\{ f \in C([0, 1], [-1, 1]) \mid \int_0^1 |f(t)| dt < \epsilon \right\}$$

überhaupt keine der basisoffenen Mengen der punktweisen Topologie: Jede solche enthält ja wiederum eine Menge der Form

$$\{f \in C([0, 1], [-1, 1]) \mid |f(x_i) - y_i| < \delta_i \text{ für alle } 1 \leq i \leq n\},$$

für irgendwelche  $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$  und  $y_1, \dots, y_n \in [-1, 1]$ , aber Bedingungen an endlich viele Stellen einer Funktion liefert natürlich überhaupt keine Abschätzung an die Größe des Integrals.

Insbesondere folgt, dass  $C([0, 1], [-1, 1])$  bezüglich der Topologie der punktweisen Konvergenz nicht erstabzählbar sein kann.

Auch unter Quotientenbildung bleibt die Erstabzählbarkeit nicht unbedingt erhalten:

**5.6. Beispiel** Betrachten wir noch ein drittes Mal das Beispiel aus 1.6, also den Quotienten von  $\mathbb{R}$ , in dem alle ganzen Vielfachen von  $2\pi$  miteinander identifiziert werden. Dieser ist nicht erstabzählbar: Denn ist  $V_i, i \in \mathbb{N}$  eine abgezählte Umgebungsbasis von  $2\pi\mathbb{Z} \in \mathbb{R}/\sim$ , so gibt es per Definition  $\epsilon_{i,n} > 0$  derart, dass  $D(n, \epsilon_{i,n}) \subseteq V_i$ , und durch eventuelle Verkleinerung können wir sicherlich  $\epsilon_{i,n} < \frac{1}{2}$  erreichen. Aber dann ist auch das Bild von  $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} D(n, \frac{\epsilon_{i,n}}{2})$  eine Umgebung von  $2\pi\mathbb{Z}$ , und per Konstruktion gilt  $U \subseteq V_i$  für kein  $V_i$ , im Widerspruch dazu, dass die  $V_i$  eine Umgebungsbasis von  $2\pi\mathbb{Z}$  bilden.

Zum Schluss will ich noch eine Warnung aussprechen: Eine Topologie heißt *sequentiell*, wenn jede ihrer sequentiell abgeschlossenen Mengen auch abgeschlossen ist. Das ist wohl ein sehr nahegelegener Begriff und Sequentialität einer Topologie reicht (gemäß Argument in 5.4) dafür aus, dass man die Stetigkeit ausgehender Abbildungen mit Folgenkonvergenz testen kann. Aber im Gegensatz zur Erstabzählbarkeit vererbt sich die Sequentialität überraschenderweise nicht auf Teilräume und vielleicht noch überraschender, ist es nicht allgemein richtig, dass in einem sequentiellen Raum der Abschluss einer Menge  $A$  genau die Menge der Grenzwerte von Folgen in  $A$  ist! Was nämlich selbst bei sequentiellen Räumen noch passieren kann, ist dass es unter den hinzugefügten Grenzwerten eine Folge gibt die gegen einen neuen Grenzwert konvergiert, und unter diesen dann Folgen die gegen neue Grenzwerte konvergiert, und so weiter. Hier ein Beispiel:

**5.7. Beispiel** Es sei  $\mathbb{R}^{(\infty)} = \{f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}\}$  die Menge der abbrechenden Folgen mit der Topologie für die  $U \subseteq \mathbb{R}^{(\infty)}$  offen genau dann, ist wenn  $U \cap \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^n$  offen ist, wo wir  $\mathbb{R}^n$  als Teilmenge von  $\mathbb{R}^{(\infty)}$  vermöge der ersten  $n$  Koordinaten auffassen. Es wird einmal eine Übungsaufgabe werden zu zeigen, dass dies genau die Einschränkung der Box-Topologie auf  $F(\mathbb{N}, \mathbb{R})$  ist, aber das brauchen wir hier nicht. Was wir benutzen wollen, ist das eine Folge in  $\mathbb{R}^{(\infty)}$  bezüglich dieser Topologie genau dann konvergiert, wenn sie schließlich in einem  $\mathbb{R}^n$  liegt und dann dort konvergiert. Ich überlasse das einmal als Aufgabe. Die Sequentialität dieses Raumes folgt dann sofort aus der des  $\mathbb{R}^n$ .

Setze nun  $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < \frac{1}{n}\}$  und betrachte

$$S = \mathbb{R}^{(\infty)} \setminus \bigcup_{n \geq 0} B_n$$

Dann gibt es eine Folge  $f: \mathbb{N} \rightarrow S$ , die gegen  $x \in \mathbb{R}^{(\infty)}$  konvergiert, genau dann, wenn  $x \neq 0$  ist (wie wir gleich zeigen werden). Es folgt dann natürlich, dass  $\overline{S} = \mathbb{R}^{(\infty)}$ , aber man könnte vielleicht sagen, dass Folgen in  $\mathbb{R}^{(\infty)}$  zwei Schritte brauchen um das zu erkennen.

Ist jedenfalls  $x \neq 0$  so gilt  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $|x| > 0$  und wir können ein  $k \geq n$  mit  $1/k < |x|$  wählen. Dann konvergiert die Folge  $f$

$$i \mapsto x + \frac{1}{i+1} e_k,$$

wo  $e_k$  der  $k$ -te Einheitsvektor ist, offenbar gegen  $x$  und liegt irgendwann in  $S$ : Es gilt dann schließlich

$$|f_i| = \sqrt{|x|^2 + \frac{1}{i+1}^2} > |x| > \frac{1}{k} \geq \frac{1}{m}$$

bei  $m \geq k$ , sodass  $f_i$  dann nicht in  $B_m$  liegt. Aber in einem  $B_m$  mit  $m < k$  als liegt es sowieso nicht, weil ja  $B_m \subseteq \mathbb{R}^m$ .

Und gegen 0 konvergiert keine Folge aus  $S$ : Sie würde ja dann schließlich in einem  $\mathbb{R}^n$  leben und dort gegen 0 konvergieren. Aber dann müssten ja sogar fast alle Folgeglieder in  $B_n$  liegen.

Zum Schluss erwähne ich noch folgenden Satz, der die Situation abschließend klärt, den wir aber nicht beweisen werden:

**5.8. Satz** (Fréchet, Uryson) *Für einen topologischen Raum  $X$  sind äquivalent:*

- (1) *Jede Teilmenge  $A \subseteq X$  ist mit der Teilraumtopologie sequentiell.*
- (2) *Zu jeder Teilmenge  $A \subseteq X$  und jedem  $x \in \overline{A}$  gibt es eine Folge  $f: \mathbb{N} \rightarrow A$ , die gegen  $x$  konvergiert.*

Einen Raum, der diese äquivalenten Eigenschaften hat nennt man auch einen Fréchet-Uryson Raum, und wir haben bewiesen, dass jeder erstabzählbare Raum ein solcher ist, und obiges Beispiel gibt einen sequentiellen Raum, der eben kein Fréchet-Uryson Raum ist. Sehen Sie den nicht sequentiellen Teilraum?

## 6. Zusammenhang

Wir hatten in 3.35 gesehen, dass sich Intervalle als Quotienten von Cantormengen darstellen lassen. Ich hoffe, Sie stimmen zu, dass ein Intervall zusammenhängt, eine Cantormenge aber nicht. Es gibt viele Arten diese Intuition zu formalisieren, hier die erste:

**6.1. Definition** Ein topologischer Raum  $X$  heißt *zusammenhängend*, wenn für offene  $U, V \subseteq X$  aus

$$U \cup V = X \quad \text{und} \quad U \cap V = \emptyset$$

immer schon  $U = \emptyset$  oder  $V = \emptyset$  folgt.

Man denke als Beispiel an  $X = D(2, 1) \cup D(-2, 1)$ , wodrin die beiden Kugeln eben offen und disjunkt sind. Das ist also ein typisches Beispiel eines unzusammenhängenden Raum. Zusammenhang kann man als eine abstrakte Art den Zwischenwertsatz zu formalisieren ansehen:

**6.2. Satz** *Ist  $X$  ein topologischer Raum, so sind äquivalent:*

- (1)  *$X$  ist zusammenhängend.*
- (2) *Die einzigen Teilmengen von  $X$ , die sowohl offen als auch abgeschlossen sind, sind  $\emptyset$  und  $X$ .*
- (3) *Das Bild jeder stetigen Abbildung  $X \rightarrow \mathbb{R}$  ist ein Intervall.*
- (4) *Jede stetige Abbildung  $X \rightarrow \{0, 1\}$  ist konstant.*
- (5) *Jede lokal konstante Abbildung  $X \rightarrow Z$ ,  $Z$  irgendeine Menge, ist konstant.*

Eine Abbildung  $f$  heißt hier lokal konstant, wenn es zu jedem  $x \in X$  eine Umgebung  $U \subseteq X$  gibt derart, dass  $f$  auf  $U$  konstant ist (oder äquivalent, wenn  $f^{-1}(f(x))$  für jedes  $x \in X$  offen ist). Insbesondere folgt aus 3.25, dass eine lokal konstante Abbildung stetig bezüglich jeder Topologie auf  $Z$  ist und für die diskrete Topologie sind die stetigen Abbildungen auch genau die lokal konstanten, dann ist ja  $f^{-1}(f(x))$  als Urbild einer offenen Menge sicher offen.

PROOF. (2) ist eine direkte Umformulierung von (1); man beachte nur, dass für Mengen wie in der Definition des Zusammenhangs immer  $V = X \setminus U$  gilt. Für (1)  $\Rightarrow$  (3) nehme an, dass  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  kein Intervall als Bild hat, es also  $a < b < c$  in  $\mathbb{R}$  gibt, mit  $a, c \in \text{im}(f)$ , und  $c \notin \text{im}(f)$ . Dann ist  $U = f^{-1}(] - \infty, b[)$  und  $V = f^{-1}(]b, \infty[)$  eine Zerlegung von  $X$  in offene, disjunkte Mengen die beide nicht leer sind (sie enthalten ja Urbilder von  $a$  beziehungsweise  $c$ ). Also hängt  $X$  nicht zusammen. Offenbar gilt (3)  $\Rightarrow$  (4). Und für (4)  $\Rightarrow$  (1), betrachte man für  $U, V \subseteq X$  mit  $U \cup V = X$  und  $U \cap V = \emptyset$  die Abbildung

$$f: X \longrightarrow \{0, 1\}, \quad x \longmapsto \begin{cases} 0 & x \in U \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist  $f$  nach 3.25 stetig und es gilt  $U = f^{-1}(0)$  und  $V = f^{-1}(1)$ . Dass  $f$  konstant ist, sagt also genau, dass eines von  $U$  und  $V$  leer sein muss. Zum Schluss gilt offenbar (5)  $\Rightarrow$  (4), da jede stetige Abbildung  $\{0, 1\}$  in nach der Vorbemerkung lokal konstant ist, und für (4)  $\Rightarrow$  (5) betrachte man zu  $g: X \rightarrow Z$  lokal konstant und  $z \in \text{im}(g)$  (der Fall  $X = \emptyset$  ist ja trivial) die Abbildung

$$f: X \longrightarrow \{0, 1\}, \quad x \longmapsto \begin{cases} 0 & g(x) = z \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Da sie auf jeder Menge  $g^{-1}(g(x))$  konstant ist, folgt aus 3.25, dass sie stetig ist, und ihre Konstanz impliziert dann  $X = f^{-1}(0) = g^{-1}(z)$ , also genau dass  $g$  konstant mit Wert  $z$  ist.  $\square$

Zum Beispiel sieht man sofort, dass indiskrete Topologien immer zusammenhängen und diskrete Topologien nur auf höchstens einpunktigen Mengen. Wichtiger:

**6.3. Beispiel** Eine Teilmenge  $A \subseteq \mathbb{R}$  (ausgestattet mit der Teilraumtopologie) hängt zusammen genau dann, wenn  $A$  ein Intervall ist. Ist  $A$  kein Intervall, so gibt es  $a < b < c \in \mathbb{R}$  mit  $a, c \in A$  und  $b \notin A$ . Aber dann ist

$$U = ] - \infty, b[ \cap A \quad \text{und} \quad V = ]b, \infty[ \cap A$$

eine Zerlegung in zwei disjunkte nicht leere offene Mengen, und damit  $A$  nicht zusammenhängend. Dass Intervalle auch wirklich zusammenhängen via der Umformulierungen in 6.2 genau der Zwischenwertsatz der Analysis!

Insbesondere ist  $[0, 1]$  zusammenhängend und die Cantormengen sind das nicht. Aber etwa auch  $\mathbb{Q}$  ist nicht zusammenhängend.

Bevor wir weitere Beispiele betrachten, beobachten wir, dass sich hieraus ein leichtes Kriterium für Zusammenhang ergibt:

**6.4. Definition** Ein topologischer Raum  $X$  heißt *wegzusammenhängend*, wenn es zu je zwei Punkten  $x, y \in X$  eine stetige Abbildung  $w: [a, b] \rightarrow X$  gibt mit  $w(a) = x$  und  $w(b) = y$ . So eine Abbildung heißt ein *Weg* von  $x$  nach  $y$ .

**6.5. Lemma** *Jeder wegzusammenhängende Raum ist auch zusammenhängend.*

PROOF. Sind nämlich  $U, V \subseteq X$  offen mit  $U \cup V = X$  and  $U \cap V = \emptyset$  und  $U, V$  sind beide nicht leer, etwa mit  $u \in U$  und  $v \in V$ , so gibt es nach Voraussetzungen einen Weg  $w$  von  $u$  nach  $v$ . Aber dann bilden  $w^{-1}(U)$  und  $w^{-1}(V)$  eine disjunkte offene Zerlegung eines Intervalls in nicht-leere Mengen, was nach vorigem Beispiel nicht möglich ist.  $\square$

Wegzusammenhang ist einem Raum häufig leichter anzusehen als Zusammenhang.

**6.6. Beispiel** (1) Ist  $X$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und  $x, y \in X$  so bezeichne

$$[x, y] = \{z \in X \mid \text{es gibt ein } t \in [0, 1] \text{ mit } z = ty + (1-t)x\}$$

die Verbindungsstrecke zwischen  $x$  und  $y$ . Eine Teilmenge  $A \subseteq X$  heißt *konvex*, wenn mit je zwei Punkten  $x, y \in A$  sogar schon  $[x, y] \subseteq A$ . Da die Strecke offenbar über den Weg  $[0, 1] \rightarrow [x, y], t \mapsto ty + (1-t)x$  parametrisiert wird, ist jede konvexe Menge auch wegzusammenhängend.

Beispiele sind natürlich der ganze Raum  $X$  selbst. Zum Beispiel sind  $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  sowohl bezüglich der Topologie der punktweisen Konvergenz und der lokal gleichmäßigen Konvergenz zusammenhängend. Und in einem (halb-)normierten Raum sowohl die offenen als auch abgeschlossenen Kugeln konvex.

Damit sind insbesondere Kugeln in der euklidischen Topologie des  $\mathbb{R}^n$  immer zusammenhängend.

(2) Ist  $(X, d)$  ein (pseudo-)metrischer Raum und  $x, y \in X$  mit  $d(x, y) = \infty$  so sind

$$U = \{z \in X \mid d(x, z) < \infty\} \quad \text{und} \quad V = \{z \in X \mid d(x, z) = \infty\}$$

offenbar disjunkt und nicht leer und überdecken  $X$ . Sie sind auch offen, beide enthalten Kugeln mit beliebigem endlichen Radius um jeden ihrer Punkte. Insbesondere kann  $X$  dann nicht zusammenhängen. Zum Beispiel ist  $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  bezüglich der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz unzusammenhängend, da jede unbeschränkte Funktion unendlichen Abstand zu jeder beschränkten hat.

(3) Ist  $f: X \rightarrow Y$  surjektiv und  $X$  (weg-)zusammenhängend, so ist auch  $Y$  (weg-)zusammenhängend:

Für den Zusammenhang beobachte man einfach, dass eine disjunkte offene Zerlegung  $U, V \subseteq Y$  immer eine solche  $f^{-1}(U), f^{-1}(V) \subseteq X$  von  $X$  liefert. Und wenn  $f$  surjektiv ist, so sind Urbilder nicht-leerer Mengen wieder nicht-leer, sodass eine Zerlegung von  $Y$ , die Unzusammenhang bezeugt, auch eine von  $X$  liefert, die Unzusammenhang bezeugt. Und für den Wegzusammenhang seien  $y, y' \in Y$ , dann wähle Urbilder  $x$  und  $x'$  und einen Weg  $w$  von  $x$  nach  $x'$ , so ist  $f \circ w$  ein Weg von  $f(x) = y$  nach  $f(x') = y'$ .

Insbesondere sind Quotienten von (weg-)zusammenhängenden Räumen wieder wegzusammenhängend.

(4) Ist eine Topologie gröber als eine (weg-)zusammenhängende, so ist sie offenbar auch (weg-)zusammenhängend.

(5) Ich schreibe noch einmal den Zusammenhang einer Teilmenge  $B \subseteq X$  (in der Teilraumtopologie) in Termen der offenen Mengen von  $X$  aus, weil uns das bald mehrmals begegnen wird. Zur Erinnerung: Offene Mengen von  $B$  haben die Form  $U \cap B$  für  $U \subseteq X$  offen. Zusammenhang von  $B$  bedeutet also, dass für  $U, V \subseteq X$  offen mit

$$(U \cap B) \cap (V \cap B) = \emptyset \quad \text{und} \quad (U \cap B) \cup (V \cap B) = B$$

schon  $U \cap B = \emptyset$  oder  $V \cap B = \emptyset$  gilt. Die zweite Bedingung übersetzt sich offenbar einfach zu  $B \subseteq U \cup V$  und die erste zu  $U \cap V \subseteq X \setminus B$ .

Dass  $B$  zusammenhängt sagt also genau, dass für offene  $U, V \subseteq X$  mit

$$U \cap V \subseteq X \setminus B \quad \text{und} \quad B \subseteq U \cup V$$

schon  $U \cap B = \emptyset$  oder  $V \cap B = \emptyset$  gilt.

Hier ist noch ein Lemma, das mit der Intuition von Zusammenhang gut einhergeht:

**6.7. Lemma** *Ist  $X$  ein topologischer Raum und  $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$  eine Familie von Teilmengen, die (bezüglich der Teilraumtopologie) alle (weg-)zusammenhängend sind, und derart, dass  $A \cap B \neq \emptyset$  für alle  $A, B \in \mathcal{F}$ . Dann ist auch  $\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$  (weg-)zusammenhängend (in der Teilraumtopologie).*

Insbesondere lässt sich dieses Lemma anwenden, wenn alle  $A \in \mathcal{F}$  wenigstens einen Punkt gemeinsam haben. Insbesondere sehen wir dass  $A \cup A'$  (weg-)zusammenhängend ist, wenn  $A$  und  $A'$  das sind und  $A \cap A' \neq \emptyset$ . Natürlich kann  $A \cup A'$  auch ohne jede dieser Annahmen zusammenhängen (nehme  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} ]2n, 2n+1[$  und  $A' = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [2n+1, 2n+2]$ ), aber die Definition von Zusammenhang sagt insbesondere, dass das nie passieren kann, wenn  $A$  und  $A'$  beide

offen sind! Zwischen je zwei disjunkten offenen Mengen ist noch genug Platz, als dass sie nicht zusammenhängen.

PROOF. Fangen wir wieder mit Zusammenhang an und setzen erst einmal  $B := \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$ . Nach der Übersetzung in 6.6, müssen wir zeigen dass für  $U, V \subseteq X$  offen mit  $U \cap V \subseteq X \setminus B, B \subseteq U \cup V$  und  $U \cap B \neq \emptyset$  schon  $V \cap B = \emptyset$  gilt. Per Definition von  $B$  gibt es dann ein  $b \in U \cap A$  für ein  $A \in \mathcal{F}$ . Aber da  $A$  zusammenhängt, folgt dann schon  $V \cap A = \emptyset$  und  $U \cap A = A$ , also  $A \subseteq U$ . Nehmen wir uns nun ein beliebiges  $A' \in \mathcal{F}$  her. Dann haben wir

$$\emptyset \neq A \cap A' \subseteq U \cap A'$$

und da auch  $A'$  zusammenhängt folgt  $V \cap A' = \emptyset$ . Also wie gewünscht

$$\emptyset = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} V \cap A = V \cap \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A = V \cap B.$$

Dann zum Wegzusammenhang: Es seien  $a \in A$  und  $a' \in A'$  für  $A, A' \in \mathcal{F}$  zwei beliebige Punkte aus  $B$ . Nach Voraussetzungen können wir uns einen Punkt  $b \in A \cap A'$  wählen und wegen des Wegzusammenhangs von  $A$  und  $A'$  gibt es Wege  $w: [r, s] \rightarrow A$  von  $a$  nach  $b$  und  $v: [r', s'] \rightarrow A'$  von  $b$  nach  $a'$ . Aber dann ist

$$w * v: [r, s + s' - r'] \longrightarrow B, \quad t \longmapsto \begin{cases} w(t) & t \leq s \\ v(t + r' - s) & t \geq s \end{cases}$$

nach 3.25 stetig und damit ein Weg von  $a$  nach  $a'$ .  $\square$

**6.8. Beispiel** Eine Teilmenge  $A$  eines topologischen  $\mathbb{R}$ -Vektorraums  $X$  heißt *sternförmig* um einen Punkt  $c \in A$ , wenn mit  $x \in A$  auch  $[c, x] \subseteq A$  gilt; aus hoffentlich offensichtlichen Grund heißt dann  $c$  ein *Sternzentrum* von  $A$ . Die Menge  $A$  ist also konvex genau dann, wenn jeder ihrer Punkte ein Sternzentrum ist, aber ein (sagen wir fünfzackiger!) Stern ist eben sternförmig aber nicht konvex. Und wegen

$$A = \bigcup_{x \in A} [c, x]$$

ist jede sternförmige Menge nach vorigem Lemma wegzusammenhängend.

Hier ist eine weitere Anwendung von 6.7:

**6.9. Satz** Jedes Produkt (weg-)zusammenhängender Räume ist (weg-)zusammenhängend.

PROOF. Wegzusammenhang ist in diesem Fall trivial, da ein Weg in einem Produkt ja gemäß 3.15 nichts weiter ist als eine Ansammlung von Wegen in den Komponenten.

Zusammenhang ist subtiler. Der Fall eines zweifachen Produkts ist eine Übungsaufgabe. Per Induktion folgt natürlich der Fall endlicher Produkte und ich erkläre hier nun noch, wie man auf beliebige Produkte schließt. Sei also  $I$  eine beliebige Menge und  $X_i$  für jedes  $i \in I$  ein zusammenhängender topologischer Raum. Ist dann ein  $X_i = \emptyset$  für ein  $i \in I$  so gilt natürlich auch  $\prod_{i \in I} X_i = \emptyset$  und es ist nichts zu tun. Ansonsten wähle jeweils einen Punkt  $x_i \in X_i$  und betrachte für  $F \subseteq I$  endlich

$$Y_F = \left\{ y \in \prod_{i \in I} X_i \mid y_i = x_i \text{ für alle } i \in I \setminus F \right\}.$$

Dann gilt  $Y_F \cong \prod_{i \in F} X_i$  und damit ist  $Y_F$  zusammenhängend. Da  $x \in Y_F$  für jedes  $F$  gilt folgt dann mittels 6.7 auch, dass

$$Y = \bigcup_{F \subseteq I \text{ endlich}} Y_F$$

zusammenhängt. Und es gilt zwar im Allgemeinen  $Y \subsetneq \prod_{i \in I} X_i$ , wenn  $I$  unendlich ist, aber  $\bar{Y} = \prod_{i \in I} X_i$ : Denn ist  $z \in \prod_{i \in I} X_i$  ein beliebiger Punkt, so enthält jede Umgebung von  $z$  ja eine der Basismengen

$$\prod_{i \in F} U_i \times \prod_{i \in I \setminus F} X_i$$

für eine endliche Menge  $F \subseteq I$  und  $\emptyset \neq U_i \subseteq X_i$  offen. Aber diese Menge schneidet offenbar  $Y_F$ , also erst recht  $Y$  und damit folgt  $z \in \bar{Y}$ . Das folgende Lemma tut nun den Rest.  $\square$

**6.10. Lemma** *Ist  $X$  ein topologischer Raum und  $A \subseteq B \subseteq \bar{A} \subseteq X$ , so ist  $B$  schon dann zusammenhängend, wenn  $A$  das ist. Insbesondere hängen Abschlüsse zusammenhängender Mengen wieder zusammen.*

Wie wir gleich sehen werden, ist das Analog für Wegzusammenhang nicht korrekt, und das ist der wohl entscheidende Vorteil von Zusammenhang gegenüber Wegzusammenhang.

PROOF. Direkt aus der Definition des Abschlusses erhalten wir dass für offenes  $U \subseteq X$  gilt  $U \cap A = \emptyset$  genau dann, wenn  $U \cap B = \emptyset$ : Wegen  $U \cap A \subseteq U \cap B$  folgt offenbar aus dem rechten sowieso das linke, und per Definition liegt ja ein Punkt im Abschluss von  $A$ , wenn er keine Umgebung besitzt, die von  $A$  disjunkt ist, was die andere Implikation liefert.

Damit haben wir für  $U, V \subseteq X$  offen mit  $U \cap V \subseteq X \setminus B$  und  $B \subseteq U \cup V$  bei  $U \cap B \neq \emptyset$  auch  $U \cap A \neq \emptyset$ , damit wegen des Zusammenhangs von  $A$  schon  $V \cap A = \emptyset$  und damit  $V \cap B = \emptyset$ , was wir zeigen mussten.  $\square$

**6.11. Beispiel** Hier ist ein Beispiel einer zusammenhängenden, aber nicht wegzusammenhängenden Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$ . Es sei  $V \subseteq \mathbb{R}^2$  der Graph der Abbildung

$$\mathbb{R}_{>0} \longrightarrow [-1, 1], \quad t \longmapsto \cos\left(\frac{1}{t}\right).$$

Dann ist  $V$  vermöge

$$\mathbb{R}_{>0} \longrightarrow V, \quad t \longmapsto \left(t, \cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)$$

und

$$V \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}, \quad (x, y) \longmapsto x$$

zu  $\mathbb{R}_{>0}$  homöomorph und damit sicherlich wegzusammenhängend. Aber es gilt  $\bar{V} = V \cup (\{0\} \times [-1, 1])$  und diese Menge ist nun nach dem vorigen Lemma immer noch zusammenhängend, aber eben nicht mehr wegzusammenhängend: Nehmen wir nämlich an es gäbe einen Weg  $w: [a, b] \rightarrow \bar{V}$  von einem  $v \in V$  zu  $(0, x)$  mit  $x \in [-1, 1]$ , so ist das Urbild von  $\{0\} \times [-1, 1]$  unter  $w$  abgeschlossen in  $[a, b]$  und wegen  $w(b) = (0, x)$  nicht leer. Damit hat es ein kleinstes Element  $s$ . Ich behaupte, dass  $w$  in  $s$  nun aber doch nicht stetig sein kann. Denn dann müsste es ja ein  $\delta > 0$  geben mit

$$|t - s| < \delta \implies |w(t) - w(s)| < 1$$

Aber per Konstruktion gilt für  $s - \delta < t < s$  dann sicher  $w(t) \in V$  und nach dem Zwischenwertsatz muss die Komposition

$$[t, s] \xrightarrow{w} \bar{V} \xrightarrow{\text{pr}_1} \mathbb{R}$$

dann alle Werte zwischen  $\text{pr}_1(w(t)) > 0$  und  $\text{pr}_1(w(s)) = 0$  annehmen. Aber zwischen diesen Zahlen liegen alle der Form  $\frac{1}{\pi n}$  für groß genug  $n \in \mathbb{N}$ , und der einzige Punkt von  $\bar{V}$  mit erster Koordinate  $\frac{1}{\pi n}$  ist  $(\frac{1}{\pi n}, (-1)^n)$ . Es gibt also für alle groß genug  $n$  ein  $t < r_n < s$  mit  $w(r_n) = (\frac{1}{\pi n}, (-1)^n)$ . Setzen wir nun  $w(s) = (0, y)$  so haben wir bei  $y \geq 0$  und ungeradem  $n$  sicherlich

$$|w(r_n) - w(s)| = \left| \left(\frac{1}{\pi n}, -1\right) - (0, y) \right| > y + 1 \geq 1$$

und bei  $y \leq 0$  analoges bei geradem  $n$ . In jedem Fall kann es das gesuchte  $\delta$  nicht geben.

Einen nicht zusammenhängenden Raum kann man natürlich in seine Komponenten zerlegen:

**6.12. Konstruktion** Ist  $X$  ein topologischer Raum, so betrachte die Äquivalenzrelation(en) auf  $X$  für die  $x \sim y$  genau dann, wenn es eine (weg-)zusammenhängendes  $U \subseteq X$  gibt mit  $x, y \in U$ ; Symmetrie ist per Definition gegeben, für Reflexivität nehme man einfach  $U = \{x\}$  und für die Transitivität bemühe man einmal 6.7 um zu sehen, dass für (weg-)zusammenhängende  $U, V \subseteq X$  mit  $x, y \in U$  und  $y, z \in V$  auch  $U \cup V$  zusammenhängt, und offenbar  $x, z \in U \cup V$  gilt.

Die Äquivalenzklassen dieser beiden Relationen heißen die *Zusammenhangs-* beziehungsweise *Wegekomponenten*. Und nur zu Sicherheit: Die Weg-/Zusammenhangskomponenten hängen auch wirklich (weg-)zusammen, etwa ist für jedes  $x \in X$  die Weg-/Zusammenhangskomponente von  $x$  ja per Konstruktion die Vereinigung aller (weg-)zusammenhängenden Teilmengen von  $X$ , die  $x$

enthalten, und so eine Vereinigung ist nach 6.7 eben wieder (weg-)zusammenhängend. Sie sind also genau die maximalen (weg-)zusammenhängenden Teilmengen von  $X$ .

Als Konsequenz von 6.10 notieren wir sofort:

**6.13. Korollar** *Die Zusammenhangskomponenten eines topologischen Raums sind abgeschlossene Teilmengen.*

Für die Wegzusammenhangskomponenten stimmt das allgemein nicht mehr wie 6.11 zeigt.

- 6.14. Beispiel**
- (1) Es ist nun also  $X$  (weg-)zusammenhängend genau denn, wenn es nur aus einer Weg-/Zusammenhangskomponente besteht. Aus 6.5 folgt auch direkt, dass jede Zusammenhangskomponente eines topologischen Raumes eine Vereinigung von Wegzusammenhangskomponenten ist.
  - (2) Das Argument aus 6.6 zeigt, dass in einem (pseudo-)metrischen Raum Punkte mit unendlichem Abstand immer in unterschiedlichen Zusammenhangskomponenten (und damit erst recht Wegzusammenhangskomponenten) leben. Scharfes hinsehen, liefert im Beispiel  $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , dass sowohl die Zusammenhangs- als auch die Wegekomponenten von  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  genau  $\{g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \|f - g\| < \infty\}$  bestehen.
  - (3) Im Beispiel der abgeschlossenen Kosinuskurve  $\bar{V}$  in 6.11, sehen wir dass  $\bar{V}$  nur eine Zusammenhangskomponente, aber eben zwei Wegekomponenten, nämlich  $V$  und  $\{0\} \times [-1, 1]$  besitzt.
  - (4) Eine Cantormenge (und etwa auch  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ) haben als Zusammenhangskomponenten (und damit erst recht als Wegekomponenten) die Einpunktmengen; solche Räume heißen *vollständig unzusammenhängend*. Für einen Beweis beobachten wir einfach, dass es hier zu je zwei Punkten  $x < y$  dieser Räume  $X \subseteq \mathbb{R}$  ein  $x < z < y$  mit  $z \notin X$  gibt. Aber dann kann für keine offene Menge  $U \subseteq \mathbb{R}$  mit  $x, y \in U$  die Menge  $U \cap X$  zusammenhängen: Es ist dann schließlich

$$U \cap X = (U \cap X \cap ]-\infty, z]) \cup (U \cap X \cap ]z, \infty[)$$

eine Zerlegung in zwei offene nicht-leere Teilmengen.

Das ganze macht es wohl umso erstaunlicher, dass sich das zusammenhängende Intervall durch abzählbar viele Identifikationen aus der überabzählbaren total unzusammenhängenden Cantormenge hervorgehen kann.

- (5) Es gibt übrigens zusammenhängende Räume, deren Wegekomponenten Einpunktmengen sind (und die nicht nur aus einem Punkt bestehen). Die vielleicht amüsanteste ist Cantor's löchriges Zelt. Hierzu nehme man

$$\{(1/2, 1/2)\} \cup (C_1 \times \{0\}) \subseteq \mathbb{R}^2$$

und füge für jeden Punkt  $c \in C_1$ , der eine abbrechende 3-adische Entwicklung besitzt, den rationalen Teil der Verbindungsstrecke  $[(1/2, 1/2), c]$  hinzu (also den Schnitt  $[(1/2, 1/2), c] \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{Q})$ ) und für die übrigen  $c \in C_1$  den irrationalen Teil der Verbindungsstrecke (also  $[(1/2, 1/2), c] \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ ). Dass in diesem Raum jeder Weg konstant ist, ist nicht schwer zu sehen, aber dass er wirklich zusammenhängt bedarf etwas Maschinerie, die ich hier nicht entwickeln will (Stichwort ist der Satz von Baire). Noch seltsamer: Entfernt man die Spitze des Zeltes, als  $(1/2, 1/2)$  so ist der verbleibende Raum genau wie die Cantormenge selbst total unzusammenhängend. Das löchrige Zelt wird also nur von einer einzigen Niete zusammengehalten.

Um solch unangenehme Beispiele auszuschließen, noch eine Definition:

**6.15. Definition** Ein topologischer Raum  $X$  heißt *lokal (weg-)zusammenhängend*, wenn es zu jeder Umgebung  $U \subseteq X$  eines Punktes  $x \in X$  noch eine Umgebung  $x \in V \subseteq U$  gibt, die (weg-)zusammenhängend ist.

- 6.16. Beispiel**
- (1) Jede offene Teilmenge eines lokal (weg-)zusammenhängenden Raums ist offenbar wieder lokal (weg-)zusammenhängend (und das würde nicht stimmen, wenn

man nur verlangen würde, dass jeder Punkt eine (weg-)zusammenhängende Umgebung überhaupt besitzt).

- (2) Aus dem Wegzusammenhang von Kugel folgt als der lokale Wegzusammenhang jeder offenen Menge eines halbnormierten Raums  
Insbesondere ist jedes offene  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  lokal wegzusammenhängend (völlig unabhängig davon ob  $U$  (weg-)zusammenhängend ist).
- (3) Natürlich folgt aus lokalem Wegzusammenhang wegen 6.5 auch lokaler Zusammenhang.

Das folgende ist dann wohl der Hauptsatz dieses Abschnitts:

**6.17. Satz** *Es sei  $X$  ein topologischer Raum.*

- (1) *Ist  $X$  lokal zusammenhängend, so sind die Zusammenhangskomponenten von  $X$  offen.*
- (2) *Ist  $X$  lokal wegzusammenhängend, so stimmen die Wegekomponenten und Zusammenhangskomponenten überein.*

*Ist insbesondere  $X$  zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, so ist  $X$  auch wegzusammenhängend.*

Zum Beispiel kann man also die Stetigkeit eine Funktion auf einem lokal zusammenhängenden Raum gemäß 3.25 auf den Zusammenhangskomponenten einzeln testen; die einzelnen Komponenten haben also keinerlei topologische Relation zu einander. Für einen Raum wie  $\mathbb{Q}$  stimmt das natürlich nicht (ein vollständig unzusammenhängender Raum ist auch nur dann lokal zusammenhängend wenn er diskret ist). Wir erhalten auch:

**6.18. Korollar** *Ist  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  ist offen, dann ist  $U$  zusammenhängend genau dann, wenn  $U$  wegzusammenhängend ist.*

**BEWEIS VON 6.17.** Dass die Zusammenhangskomponenten von  $X$  offen sind, ist durch scharfes Hinsehen äquivalent dazu, dass jeder Punkt eine zusammenhängende Umgebung hat. Aber es besitzt per Annahme ja sogar beliebig kleine, was (1) zeigt.

Und anstatt (2) direkt zu zeigen, ist es leichter zuerst den Zusatz zu zeigen, nehmen also  $X$  auch noch als zusammenhängend an. Dazu beobachten wir zuerst einmal, das mit dem gleichen Argument wie für (1), bei lokalem Wegzusammenhang die Wegekomponenten offen sind. Ist nun  $X$  leer, so ist nichts zu tun. Sonst wähle ein  $x \in X$  und bezeichne mit  $U$  die Wegekomponenten von  $x$  und mit  $V$  die Vereinigung aller anderen Wegekomponenten in  $X$ . Beides sind nun also offene Mengen, und wegen  $x \in U$  muss dann, weil  $X$  zusammenhängt, schon  $V = \emptyset$  gelten, und damit ist  $U = X$  wegzusammenhängend.

Um hieraus (2) zu erhalten, wenden wir diese Aussage nun auf jede Zusammenhangskomponenten von  $X$  an, diese hängen schließlich zusammen, sind nach (1) offen und daher selbst wieder lokal wegzusammenhängend.  $\square$

Zum Schluss noch zwei weiteres seltsames Beispiel, das nur demonstrieren sollen, dass schon Teilmengen des  $\mathbb{R}^2$  sehr viel komplizierter sein können, als man möglicherweise denkt:

**6.19. Beispiel** Es sei  $M_0$  die Vereinigung aller Halbkreisbögen in der oberen Halbebene, die  $(1, 0)$  mit Punkten der Form  $(\frac{1}{2^n}, 0)$ ,  $n \geq 1$ , verbinden; sei  $U_0$  die Menge dieser Punkte. Nun bilde man  $M_1$  indem man man zwischen je  $(\frac{1}{2^m}, 0)$  und  $(\frac{1}{2^{m+1}}, 0)$  ebenfalls alle Halbkreisbögen einfügt, die  $(\frac{1}{2^m}, 0)$  mit einem Punkt der Form  $(\frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{n+(m+1)}}, 0)$  für  $n \geq 1$  verbinden. Mit einen Worten man fügt eine verkleinerte Kopie von  $M_0$  zwischen je zwei aufeinanderfolgende Punkte von  $U_0$  ein. Nennt man nun noch  $U_1$  die Vereinigung von  $U_0$  mit den Endpunkten der neuen Halbkreisbögen, so ist nun hoffentlich klar wie man aus  $M_n$  und  $U_n$  durch hinzufügen von immer kleineren Halbkreisbögen  $M_{n+1}$  und  $U_{n+1}$  erzeugt; ein Bild spricht hier soviel tausend Worte (oder eine Million Formeln)! Malen Sie einmal eins.

Ist dann  $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$ , so gilt jedenfalls, dass  $M$  wegzusammenhängend ist, weil jedes  $M_n$  das offenbar ist, an jedem Punkt der strikten oberen Halbebene lokal wegzusammenhängt, aber an jedem Punkt aus  $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$  zwar nicht lokal wegzusammenhängend, aber immer noch lokal zusammenhängend ist. Wieder möchte ich das hier nicht beweisen, es ist aber ganz elementar möglich.

## 7. Kompaktheit

Nun zum letzten Begriff der mengentheoretischen Topologie, mit dem wir uns befassen wollen, Kompaktheit. Ich erinnere dazu erst einmal an folgende Sätze aus den Analysisvorlesungen:

**7.1. Theorem** (Heine, Borel) *Ist  $(X, d)$  ein (pseudo-)metrischer Raum, so sind äquivalent:*

- (1) *Jede Folge in  $X$  besitzt eine konvergente Teilfolge.*
- (2) *Jede offene Überdeckung von  $X$  besitzt eine endliche Teilüberdeckung.*

**7.2. Theorem** (Bolzano, Weierstraß) *Eine beschränkte Folge im  $\mathbb{R}^n$  besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Bevor ich jetzt den offensichtlichen Schluss über Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  noch einmal formuliere, gebe ich beiden Eigenschaften aus dem Satz von Heine und Borel noch schnell Namen:

**7.3. Definition** Ein topologischer Raum  $X$  heißt *folgenkompakt*, wenn jede Folge in  $X$  eine konvergente Teilfolge besitzt, und *kompakt* (oder manchmal auch *überdeckungskompakt*), wenn jede offene Überdeckung von  $X$  eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Zur Sicherheit: Eine Überdeckung von  $X$  ist eine Ansammlung  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$  mit  $X = \bigcup_{U \in \mathcal{F}} U$ , und eine Teilüberdeckung ist einfach eine Teilmenge  $E \subseteq \mathcal{F}$ , die immer noch eine Überdeckung ist und natürlich ist eine offene Überdeckung eine, die aus offenen Mengen besteht, und eine endliche Teilüberdeckung eine für die  $E$  endlich ist (und nicht etwa eine, die aus endlichen Mengen besteht!).

Der Satz von Heine-Borel sagt also genau, dass ein (pseudo-)metrischer Raum genau dann folgenkompakt ist, wenn er überdeckungskompakt ist. Gegeben unsere bisherige Erfahrung wird es vielleicht nicht überraschen, dass die Folgenkompaktheit nicht Überdeckungskompaktheit impliziert. Aber bei Kompaktheit ist auch die andere Implikation ebenfalls nicht richtig: Es gibt überdeckungskompakte topologische Räume, die nicht folgenkompakt sind, und die Erstabzählbarkeit hat tatsächlich mit dieser Implikation zu tun (was dann die eine Richtung aus dem Satz von Heine und Borel verallgemeinert):

**7.4. Lemma** *Ein erstabzählbarer überdeckungskompakter topologischer Raum ist auch folgenkompakt.*

Das wird eine Übungsaufgabe sein. Gegenbeispiele zu den anderen Implikationen folgen am Ende des Abschnitts. Nun erstmal zum offensichtlichen Korollar aus den obigen beiden Sätzen:

**7.5. Korollar** *Eine Teilmenge  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  ist überdeckungs- oder folgenkompakt genau dann, wenn  $A$  abgeschlossen und beschränkt ist.*

PROOF. Dass eine beschränkte abgeschlossene Menge folgenkompakt ist folgt direkt aus dem Satz von Bolzano und Weierstraß. Wenn  $A$  nicht beschränkt ist, dann finden wir eine Folge  $f: \mathbb{N} \rightarrow A$  mit  $|f_n| \geq n$  und die hat offenbar keine konvergente Teilfolge. Und ist  $A$  nicht abgeschlossen, so ist  $A$  ja auch sequentiell nicht abgeschlossen (etwa nach 5.4), es gibt also eine Folge  $f$  in  $A$  die gegen einen Punkt außerhalb von  $A$  konvergiert. Aber dann konvergiert jede Teilfolge von  $f$  gegen eben jenen Punkt, und dann nicht gegen einen Punkt in  $A$ .

Und der Satz von Heine und Borel liefert den Rest. □

Die Nützlichkeit der Überdeckungskompaktheit liegt im Schließen von lokalen Eigenschaften auf globale: Gibt es zu jedem Punkt eines Raumes eine offene Umgebung die irgendeine Eigenschaft besitzt, und diese Eigenschaft vererbt sich auf endliche Vereinigungen, so besitzt der Raum sie auch als ganzen. Als einfaches Beispiel betrachte man eine stetige Funktion  $X \rightarrow \mathbb{R}$ . Ist sie lokal beschränkt und  $X$  kompakt, so ist sie auch insgesamt beschränkt (ob stetig oder nicht ist dabei egal): Denn wählen wir um jeden Punkt  $x \in X$  eine offene Umgebung  $U_x$  auf der  $f$  durch irgendein  $m_x$  beschränkt ist, so bilden diese Mengen genau eine offene Überdeckung, aus der wir eine endliche  $U_{x_1}, \dots, U_{x_n}$  auswählen können. Aber dann ist  $f$  durch das Maximum der  $m_{x_1}, \dots, m_{x_n}$  beschränkt.

Ähnliche Schlüsse gibt es zu Haus: Ist  $A \subseteq X$  diskret und abgeschlossen, so findet man um jeden Punkt von  $X$  herum ja eine Umgebung die höchstens einen Punkt von  $A$  enthält.

Und die Eigenschaft einen endlichen Schnitt mit  $A$  zu haben vererbt sich offenbar und endlichen Vereinigungen, sodass folgt, dass  $A$  dann schon endlich sein muss, wenn  $X$  kompakt ist.

Oder man habe eine Funktionenfolge  $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ , die lokal gleichmäßig gegen ein  $g: X \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert. Wieder vererbt sich die Gleichmäßigkeit der Konvergenz unter endlichen Vereinigungen (man wähle einfach zu gegebenen  $\epsilon > 0$  das Minimum der bezeugenden  $\delta$ 's auf den einzelnen Teilmengen), und wenn  $X$  kompakt ist, folgt die gleichmäßige Konvergenz der  $f_n$  gegen  $g$  auf ganz  $X$ .

Oder...

Nun zwei einfache Beobachtungen:

**7.6. Beobachtung** (1) Ist  $f: X \rightarrow Y$  stetig und surjektiv und  $X$  (folgen-)kompakt, so auch  $Y$ : Ist  $f$  eine Folge in  $Y$ , so finden wir eine Urbildfolge, und ist  $X$  folgenkompakt, hat diese eine konvergente Teilfolge und deren Bildfolge ist dann eine konvergente Teilfolge von  $f$ . Und ist  $\mathcal{F}$  eine offene Überdeckung von  $Y$ , also  $Y = \bigcup_{U \in \mathcal{F}} U$ , so folgt  $X = \bigcup_{U \in \mathcal{F}} f^{-1}(U)$  und wenn  $X$  kompakt ist, gibt es per Definition ein endliches  $E \subseteq \mathcal{F}$  mit  $X = \bigcup_{U \in E} f^{-1}(U)$  und dann folgt wegen der Surjektivität von  $f$  auch  $Y = \bigcup_{U \in E} U$ .

Zusammen mit 7.5 liefert das die offensichtlich Verallgemeinerung des Maximumsprinzips aus der Analysis: Ist  $X$  (folgen-)kompakt und  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so nimmt  $f$  ein globales Maximum und Minimum an: Denn mit  $X$  ist auch  $f(X) \subseteq \mathbb{R}$  kompakt, damit beschränkt und abgeschlossen, und hat also ein maximales und minimales Element.

(2) Ist  $X$  (folgen-)kompakt und  $A \subseteq X$  abgeschlossen, so ist auch  $A$  (folgen-)kompakt in der Teilraumtopologie. Für die Folgenkompaktheit folgt das einfach aus der Folgenabgeschlossenheit von  $A$ . Und jede offene Überdeckung von  $A$  hat die Form  $\bigcup_{U \in \mathcal{F}} U \cap A$  für eine Ansammlung offener Teilmengen  $\mathcal{F}$  von  $X$ . Aber dann folgt  $X = X \setminus A \cup \bigcup_{U \in \mathcal{F}} U$  und da  $X$  kompakt ist, gibt es ein endliches  $E \subseteq \mathcal{F}$  mit  $X = X \setminus A \cup \bigcup_{U \in E} U$ , und damit  $A = \bigcup_{U \in E} U \cap A$ , wie gewünscht.

Aber Achtung: Es ist nicht mehr richtig, dass jede kompakte Teilmenge eines topologischen Raums automatisch abgeschlossen ist, man denke etwa an  $\{1\} \subseteq \mathfrak{S}$  im Sierpinskiraum. In Hausdorffräumen kann das aber nicht mehr passieren:

**7.7. Lemma** *Ist  $X$  ein Hausdorffraum, und  $A \subseteq X$  kompakt (in der Teilraumtopologie), so ist  $A$  abgeschlossen.*

PROOF. Wir zeigen  $X \setminus A$  ist offen. Sei dazu  $x \in X \setminus A$ . Für jedes  $a \in A$  gibt es dann wegen der Hausdorffeigenschaft von  $X$  disjunkte offene  $U_a, V_a \subseteq X$  mit  $x \in U_a$  und  $a \in V_a$ . Dann ist

$$A = \bigcup_{a \in A} V_a \cap A$$

eine offene Überdeckung, es gibt also  $a_1, \dots, a_n \in A$  mit

$$A = (V_{a_1} \cap A) \cup \dots \cup (V_{a_n} \cap A)$$

Setzen wir dann  $U = U_{a_1} \cap \dots \cap U_{a_n}$ , so ist  $U$  eine offenen Umgebung von  $x$ , und

$$A \cap U = A \cap (V_{a_1} \cap U) \cup \dots \cup (V_{a_n} \cap U) = A \cap \emptyset = \emptyset,$$

also  $x \in U \subseteq X \setminus A$ . □

Das hat einiges an nützlichen Konsequenzen. Die wohl wichtigste ist:

**7.8. Korollar** *Ist  $X$  kompakt,  $Y$  hausdorff'sch und  $f: X \rightarrow Y$  stetig, so gilt:*

- (1) *Für jedes abgeschlossene  $A \subseteq X$  ist auch  $f(A) \subseteq Y$  abgeschlossen.*
- (2) *Ist  $f$  surjektiv, so trägt  $Y$  die von  $X$  via  $f$  koinduzierte Topologie.*
- (3) *Ist  $f$  bijektiv, so ist  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  stetig.*

Die Rigidität die aus (2) und (3) folgt ist recht erstaunlich: Eine weitere (vielleicht instruktive, aber definitiv weniger nützliche) Art sie auszudrücken, ist, dass eine kompakte Hausdorfftopologie

auf einem Raum nicht echt gröber oder feiner sein kann als eine weitere: Ist eine Topologie fein genug um hausdorff'sch zu sein und grob genug um kompakt zu sein, so kann man keine einzige offene Menge hinzufügen, ohne die Kompaktheit zu zerstören, und keine einzige weglassen ohne, dass sich Punkte nicht mehr durch offene Mengen trennen lassen.

PROOF. Für (1) beobachte man einfach dass  $A \subset X$  abgeschlossen, impliziert, dass  $A \subseteq X$  kompakt, damit ist nach 7.6  $f(A) \subseteq Y$  kompakt, und damit ist  $f(A) \subseteq Y$  abgeschlossen nach 7.7.

Für (2) erinnere ich daran, dass die Stetigkeit von  $f$  äquivalent dazu ist, dass die gegebene Topologie auf  $Y$  nicht feiner als die koinduzierte ist, siehe 3.22. Und umgekehrt bedeutet die Abgeschlossenheit von  $B \subseteq Y$  in der koinduzierten Topologie, genau dass  $f^{-1}(B) \subseteq X$  abgeschlossen ist. Aber wenn  $f$  surjektiv ist, gilt sicherlich  $B = f(f^{-1}(B))$  und das ist nach (1) dann abgeschlossen.

Und für (3) bemühen wir nun einfach das Stetigkeitskriterium für koinduzierte Topologien: Gemäß (2) ist nun nämlich eine Abbildung  $g: Y \rightarrow Z$  stetig genau dann, wenn  $g \circ f$  das ist. Aber für  $g = f^{-1}$  fragt das, ob  $\text{id}: X \rightarrow X$  stetig ist, und naja, natürlich!  $\square$

Nehmen wir uns damit gerüstet einmal wieder die Grassmann'schen von  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$  vor. Die Stiefel'schen sind natürlich nie kompakt:  $V_k(K^n)$  ist ja eine offene Teilmenge von  $(K^n)^k = K^{nk}$  und für  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ , also (weil euklidische Räume zusammenhängen!) nicht abgeschlossen. Und auch beschränkt ist  $V_k(\mathbb{R}^n)$  nicht, gilt  $(x_1, \dots, x_k) \in V_k(\mathbb{R}^n)$  so auch  $(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$  für alle  $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ .

Betrachte folgende Varianten der Stiefel'schen:

**7.9. Definition** Sei  $K$  ein topologischer Körper,  $W$  ein endlich dimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $b: W \times W \rightarrow K$  eine perfekte  $\sigma$ -Sesquilinearform für eine Involution  $\sigma: K \rightarrow K$ . Dann setze

$$V_k^b(W) = \{(x_1, \dots, x_k) \in W^k \mid x_1, \dots, x_k \text{ sind orthonormal bezüglich } b\},$$

die *orthonormale* Stiefel'sche.

Offenbar gilt immer  $V_k^b(W) \subseteq V_k(W)$ , da orthogonale Vektoren immer linear unabhängig sind. Die einzig wirklich relevanten Fälle für uns sind natürlich zum einen  $K = \mathbb{R}, W = \mathbb{R}^n$  und  $K = \mathbb{C}, W = \mathbb{C}^n$  mit  $b$  dem handelsüblichen Skalarprodukt. In diesen Fällen schreibt man meist

$$V_k^O(\mathbb{R}^n) \quad \text{und} \quad V_k^U(\mathbb{C}^n)$$

für die orthogonale Stiefel'sche (und im komplexen Fall spricht man auch noch häufig von der *unitären* Stiefel'schen).

**7.10. Beobachtung** Ist  $W$  ein endlich dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und  $b: W \times W \rightarrow \mathbb{R}$  eine positiv definite Bilinearform, oder  $W$  ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum und  $b: W \times W \rightarrow \mathbb{C}$  eine positiv definite Sesquilinearform, so ist  $V_k^b(W)$  kompakt. Insbesondere stimmt das für  $V_k^O(\mathbb{R}^n)$  und  $V_k^U(\mathbb{C}^n)$ . Man beachte, dass hier im Fall  $k = n$  genau die Kompaktheit der orthogonalen Gruppe  $O(n) \subseteq GL_n(\mathbb{R})$  und der unitären Gruppe  $U(n) \subseteq GL_n(\mathbb{C})$  steht.

Die zweite Aussage ist natürlich gar nicht wirklich besonderer als die erste: Wählen wir eine Orthonormalbasis von  $W$  bezüglich  $b$  (Gram-Schmidt-Verfahren!), so erhalten wir ja eine Isometrie  $\mathbb{R}^n \rightarrow W$  beziehungsweise  $\mathbb{C}^n \rightarrow W$  und damit Homöomorphismen  $V_k^O(\mathbb{R}^n) \cong V_k^b(W)$  beziehungsweise  $V_k^U(\mathbb{C}^n) \cong V_k^b(W)$ .

Und der zweite Fall (sagen wir über  $\mathbb{R}$ ) ist natürlich eine Konsequenz von 7.5: Orthonormalität besagt ja insbesondere, dass  $(x_1, \dots, x_k) \in V_k^O(\mathbb{R}^n)$  sicherlich  $|x_i| = 1$  erfüllt für alle  $1 \leq i \leq k$ ; das liefert Beschränktheit. Und da  $V_k^O(\mathbb{R}^n)$  per Definition gerade der (endliche!) Schnitt der abgeschlossenen Mengen  $\langle -, - \rangle_{i,j}^{-1}(\delta_{i,j})$  ist, wo

$$\langle -, - \rangle_{i,j}: (\mathbb{R}^n)^k \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \langle x_i, x_j \rangle$$

und  $\delta_{i,j} = 1$  bei  $i = j$  und 0 sonst.

Die Existenz von Orthonormalbasen für endlich dimensionale Skalarprodukträume über  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$  (die Sie hoffentlich in der linearen Algebra bewiesen haben) liefert uns nun, dass die Abbildung

$$V_k^b(W) \longrightarrow \text{Gr}_k(W)$$

für jeden solchen surjektiv ist, und da überhaupt jeder endlich dimensionale Vektorraum über  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$  ein Skalarprodukt besitzt, erhalten wir dann aus 7.6:

**7.11. Satz** Für jeden endlich dimensionalen  $\mathbb{R}$ - oder  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $W$  sind die Grassmann'schen  $\text{Gr}_k(W)$  kompakt.

Und mehr noch: Ist  $W$  mit einer positiv definiten Sesquilinearform ausgestattet, so kann man jede gegebene Ansammlung von orthonormalen Vektoren zu einer Orthonormalbasis ergänzen und deshalb sind die Einschränkungen der Abbildungen

$$\text{O}(W) \longrightarrow \text{V}_k^b(W) \quad \text{bzw.} \quad \text{U}(W) \longrightarrow \text{V}_k^b(W)$$

die eine orthogonalen/unitären Abbildung  $\varphi: W \rightarrow W$  auf  $(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n))$  für ein fest gewähltes orthonormales Tupel  $(x_1, \dots, x_k)$  schickt, immer noch surjektiv. Mehr noch: Es gelten folgende Varianten von 3.30 und 3.31:

**7.12. Satz** Ist  $W$  ein endlich dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt  $b$  über  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  und  $V \subseteq W$  ein  $k$ -dimensionaler Unterraum mit Orthonormalbasis  $x_1, \dots, x_k$ . Dann induzieren die stetigen Abbildungen

$$\text{O}(W) \longrightarrow \text{V}_k^b(W) \quad \text{bzw.} \quad \text{U}(W) \longrightarrow \text{V}_k^b(W), \quad \varphi \longmapsto (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_k))$$

Homöomorphismen

$$\text{O}(W)/[\{\text{id}_V\} \times \text{O}(V^\perp)] \longrightarrow \text{V}_k^b(W) \quad \text{bzw.} \quad \text{U}(W)/[\{\text{id}_V\} \times \text{U}(V^\perp)] \longrightarrow \text{V}_k^b(W)$$

und

$$\text{O}(W)/[\text{O}(V) \times \text{O}(V^\perp)] \longrightarrow \text{Gr}_k(W) \quad \text{bzw.} \quad \text{U}(W)/[\text{U}(V) \times \text{U}(V^\perp)] \longrightarrow \text{Gr}_k(W).$$

Für den  $\mathbb{R}^n$  oder  $\mathbb{C}^n$  mit dem Standardskalarprodukt stehen hier einfach

$$\text{Gr}_k(\mathbb{R}^n) \cong \text{O}(n)/[\text{O}(k) \times \text{O}(n-k)] \quad \text{und} \quad \text{Gr}_k(\mathbb{C}^n) \cong \text{U}(n)/[\text{U}(k) \times \text{U}(n-k)].$$

PROOF. Da die orthogonale/unitäre Gruppe gemäß 7.10 kompakt ist und die Stiefel'schen sowieso und die Grassmann'schen nach 4.7 hausdorff'sch, reicht es wegen 7.8 die Injektivität der Abbildungen nachzuweisen (Surjektivität haben wir uns ja oben schon überlegt). Aber für zwei Untergruppen  $H, K \subseteq G$  ist die Abbildung  $H/(H \cap K) \rightarrow G/K$  immer injektiv: Sind  $h, h' \in H$  Elemente mit  $hk = h'k$  für ein  $k \in K$ , so folgt aus  $k = h'h^{-1} \in H$  sicherlich  $k \in K \cap H$  und damit, dass die Äquivalenzklassen von  $h$  und  $h'$  schon in der Quelle übereinstimmen.

Es bleibt also nach 3.30 und 3.31 nur noch zu zeigen, dass

$$\{\varphi \in \text{O}(W) \mid \varphi(x_i) = x_i \text{ für alle } 1 \leq i \leq k\} = \{\text{id}_V\} \times \text{O}(V^\perp)$$

und

$$\{\varphi \in \text{O}(W) \mid \varphi(V) = V\} = \text{O}(V) \times \text{O}(V^\perp)$$

und analog im unitären Fall. Aber eine orthogonale Abbildung die  $V$  in  $V$  überführt tut das gleiche mit  $V^\perp$ , zerlegt sich also genau wie im zweiten Fall behauptet, und der erste folgt dann, weil  $\varphi(x_i)$  für alle  $i$ , das gleiche bedeutet wie  $\varphi|_V = \text{id}_V$ , da die  $x_i$  ja ein Erzeugendensystem von  $V$  bilden.  $\square$

**7.13. Bemerkung** Die Existenz von Orthonormalbasen gilt allgemeiner für jede perfekte symmetrische Bilinearform  $b: W \times W \rightarrow K$ , sobald nur der Grundkörper  $K$  nicht Charakteristik 2 hat und jedes Element eine Quadratwurzel besitzt (genau dann funktioniert ein etwas abgewandeltes Gram-Schmid-Verfahren immer noch; auch das haben Sie vielleicht in der linearen Algebra gelernt). Aber das impliziert noch nicht, dass die Abbildung  $\text{V}_k^b(W) \rightarrow \text{Gr}_k(W)$  surjektiv ist: Das ist äquivalent dazu, dass jeder Unterraum von  $W$  eine Orthonormalbasis bezüglich  $b$  besitzt. Das stimmt zwar wenn die Form  $b$  auf den Unterraum eingeschränkt immer noch perfekt ist, aber das ist sie eben im Allgemeinen nicht mehr; man denke etwa an die Form, die durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(2 \times 2, K)$$

gegeben ist, und den Unterraum  $\langle(1, 1)\rangle \subset K^2$ . Es ist eben eine Besonderheit von positiv definiten Formen, dass nicht nur sie selbst, sondern auch jede ihrer Einschränkungen wieder perfekt ist.

Um dieses Problem zu vermeiden, kann man anstatt Orthonormalbasen in der Definition der Stiefel'schen allgemeiner Orthogonalbasen zulassen. Es hat, solange nur  $\text{char}(K) \neq 0$  gilt, überhaupt jeder Unterraum von  $W$  eine Orthogonalbasis (auch ohne, dass  $b$  selbst überhaupt perfekt ist), und das heißt diese Variante der Stiefel'schen bildet immer surjektiv auf die Grassmann'sche ab. Aber im Falle  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  sind sie nun eben nicht mehr kompakt, und schlimmer noch: Die Grassmann'sche trägt allgemein auch nicht mehr die von der Projektion der orthogonalen Stiefel'schen koinduzierte Topologie (etwa für  $K = \mathbb{Q}$  und eine indefinite Form).

Und die Grassmann'schen sind über den meisten topologischen Körpern auch einfach nicht kompakt, etwa trivialerweise über unendlichen diskreten Körpern aber auch über Scheußlichkeiten wie  $\mathbb{Q}$  und dem algebraischen Abschluss  $\overline{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{C}$ . Kompakt sind sie genau über nicht (in)diskreten, lokal kompakten Körpern. Außer  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$  sind hierfür die prominentesten Beispiel die  $p$ -adischen Zahlen  $\mathbb{Q}_p$  und deren Erweiterungen. Solche Körper besitzen dann immer einen sogenannten Ganzheitsring  $\mathcal{O}$ , dieser ist kompakt, und es gilt ein Analog obigen Satzes in dem man  $O(n)$  bzw.  $U(n)$  durch die dann kompakte Gruppe  $GL_n(\mathcal{O})$  ersetzt; all dies benötigt aber etwas Strukturtheorie lokaler Körper und die will ich hier nicht entwickeln.

**7.14. Beispiel** Schauen wir uns zum Abschluss dieser Diskussion noch die Fälle  $\text{Gr}_1(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathbb{RP}^n$  und  $\text{Gr}_1(\mathbb{C}^{n+1}) = \mathbb{CP}^n$  genauer an.

- (1) Scharfes Hinsehen liefert

$$V_1^O(\mathbb{R}^{n+1}) = S^n \quad \text{und} \quad V_1^U(\mathbb{C}^{n+1}) = S^{2n+1},$$

mittels der Identifikation  $\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{R}^{2n+2}$ , sodass Extraktion der ersten Spalte Homöomorphismen

$$O(n+1)/O(n) \longrightarrow S^n \quad \text{und} \quad U(n+1)/U(n) \longrightarrow S^{2n+1}$$

liefert, und wir Surjektionen

$$S^n \longrightarrow \mathbb{RP}^n, \quad x \longmapsto \mathbb{R} \cdot x, \quad \text{und} \quad S^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{CP}^n, \quad x \longmapsto \mathbb{C} \cdot x$$

erhalten. Und da  $O(1) = \{\pm 1\}$  und  $U(1) = S^1$  gelten, liefern diese Homöomorphismen

$$S^n/\sim \longrightarrow \mathbb{RP}^n \quad \text{und} \quad S^{2n+1}/\sim \longrightarrow \mathbb{CP}^n$$

wobei  $x \sim y$  genau dann, wenn es ein  $a \in \{\pm 1\}$ , beziehungsweise  $a \in S^1$ , gibt mit  $x = ay$ .

- (2) Betrachte wir den reellen Fall hier noch etwas genauer: Obige Analyse sagt, dass der  $n$ te reelle projektive Raum aus der  $n$ -Sphäre entsteht indem man antipodale Punkte miteinander identifiziert. Insbesondere ist die Projektion  $S_+^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ , wo  $S_+^n = S^n \cap [\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n]$  die obere Hemisphäre bezeichnet, immer noch surjektiv. Und diese Abbildung ist nun auch injektiv, bis darauf, dass auf antipodale Punkte auf der Randsphäre  $\{0\} \times S^{n-1}$  gleiches Bild haben. Und nun können wir beobachten, dass die obere Hemisphäre vermöge

$$S_+^n \longrightarrow D^n, \quad (x_0, \dots, x_n) \longmapsto (x_1, \dots, x_n)$$

und

$$D^n \longrightarrow S_+^n, \quad x \longmapsto (\sqrt{1 - |x|^2}, x)$$

zur Einheitskugel homöomorph ist. Weil diese kompakt ist erhalten wir dann insgesamt mittels 7.8 insgesamt einen Homöomorphismus

$$D^n/\sim \longrightarrow \mathbb{RP}^n,$$

wobei  $x \sim y$  genau dann, wenn  $x = y$  oder  $x = -y \in S^{n-1}$  gilt, also wieder in der Randsphäre gegenüberliegende Punkte identifiziert werden.

Für  $n = 1$  ist das genau das Bild eines Intervalls mit zusammengeschlagenen Endpunkten, und für die höheren projektiven Räume, sieht man noch einmal ein Bild, ganz analog zu einem, dass Sie in den Übungen schon nachweisen mussten: Der  $n$ -te reelle projektive Raum besteht aus der Einheitskugel im  $\mathbb{R}^n$ , deren Randsphäre  $S^{n-1}$  in den  $(n-1)$ ten projektiven Raum kollabiert wurde. Schon für  $n = 2$  ist das aber nicht

ganz leicht zu visualisieren (und in der Tat gibt es keine Teilmenge des  $\mathbb{R}^3$  die zu  $\mathbb{R}P^2$  homöomorph ist, sodass man sich den 2-ten projektiven Raum in gewisser Weise auch wirklich nicht angucken kann; das zu beweisen, bedarf aber einiges an Mitteln, die wir erst in Folgevorlesungen entwickeln werden). Eine Visualisierung als Oberfläche mit Selbstdurchdringungen (die sogenannte Boy'sche Fläche) steht als unter Mathematikern recht berühmte Metallskulptur vor dem Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach im Schwarzwald (und weil dort häufig Photos geschossen werden, ziert der  $\mathbb{R}P^2$  folglich so manche Homepage).

- (3) Im Falle  $n = 1$  hatten wir weiter ja  $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$  in 3.29 auch  $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$  in den Übungen gesehe. Komponiert man die obigen Projektionen von Sphären auf die projektiven Räume mit diese Homöomorphismen erhält man im reellen Fall einfach die Quadrierungsabbildung  $S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^2$ , aber im komplexen Fall erhält die Hopf'sche Abbildung  $\eta: S^3 \rightarrow S^2$ , die für komplexe Koordinaten in der Quelle die Form

$$(w, z) \longrightarrow (2\operatorname{Re}(w\bar{z}), 2\operatorname{Im}(w\bar{z}), |w|^2 - |z|^2)$$

und in vollständig reellen Koordinaten die Form

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \longmapsto (2(x_1x_3 + x_2x_4), 2(x_2x_3 - x_1x_4), x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2)$$

hat. Sie spielt in der Topologie eine große Rolle, die wir aber erst in einer Folgevorlesung kennen lernen werden. Ein Versuch sie graphisch darzustellen zielt etwa die Frontseite von Hatcher's Buch "Algebraic Topology": Dort abgebildet sind einzelne Urbildmengen der Komposition

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\operatorname{st}^{-1}} S^3 \xrightarrow{\eta} S^2,$$

wo die erste Abbildung die Inverse einer stereographischen Projektion ist. Die Urbildmengen sind allesamt ineinander verschlungene Kreise, bis auf einen zentralen, dem der eine Punkt fehlt, den die stereographische Projektion als Basis nimmt.

Damit wenden wir uns nun zuletzt dem Verhalten von Kompaktheit unter Produkten zu. Unser Ziel ist folgender Satz

**7.15. Theorem** (Tychonov, 1930) *Jedes Produkt kompakter topologischer Räume ist wieder kompakt.*

Es ist wohl erwähnenswert, dass Tychonov zuerst nur die Topologie der punktweisen Konvergenz auf Funktionenräumen in ein Intervall betrachtete. Er lieferte dann 1935 den allgemeinen Fall nach; seinen Beweis brauchte er hierzu nicht verändern, aber um den Satz überhaupt zu formulieren, führte er die allgemeine Produkttopologie überhaupt erst ein!

Wir notieren also folgende Erweiterung des Kompaktkriteriums im  $\mathbb{R}^n$ :

**7.16. Korollar** *Eine Teilmenge  $A \subseteq F(I, \mathbb{R})$  ist bezüglich der Topologie der punktweisen Konvergenz kompakt, genau dann, wenn sie abgeschlossen und punktweise beschränkt ist (also für jedes  $i \in I$  die Menge  $\operatorname{pr}_i(A) \subseteq \mathbb{R}$  beschränkt ist).*

Mittels 7.8 und 7.15 erhalten wir zum Beispiel auch direkt, dass

$$\prod_{i \in \mathbb{N}_{\geq 1}} \{0, \dots, n\} \longrightarrow C_n, \quad x \longmapsto \sum_{k \geq 1} \frac{2x_k}{(2n+1)^k}$$

ein Homöomorphismus und

$$\prod_{i \in \mathbb{N}_{\geq 1}} \{0, \dots, n\} \longrightarrow [0, 1], \quad x \longmapsto \sum_{k \geq 1} \frac{x_k}{(n+1)^k}$$

eine Quotientenabbildung sind, sobald wir nur ihre Stetigkeit wissen. Im Beweis von 3.35 haben wir uns noch mit der Stetigkeit der Umkehrabbildung im ersten Fall herumgequält und Sie sich (hoffentlich) in den Übungen mit der Identifikation der Topologie im zweiten.

Mehr zum Nutzen dieses Satzes sage ich nach seinem Beweis. Zum Vergleich erstmal:

**7.17. Satz** *Abzählbare Produkte folgenkompakter Räume sind wieder folgenkompakt.*

Beliebige Produkte aber nicht, wie wir gleich unten sehen werden.

PROOF. Es sei also  $f: \mathbb{N} \rightarrow \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$  eine Folge. Da  $X_0$  folgenkompakt ist, hat  $n \mapsto f(n)_0$  eine konvergente Teilfolge, wir finden also eine Injektion  $\tau_0: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , sodass  $\text{pr}_0 \circ f \circ \tau_0: \mathbb{N} \rightarrow X_0$  konvergiert. Und haben wir induktiv für ein  $\tau_n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  gegeben, derart dass  $\text{pr}_{\leq n} \circ f \circ \tau_n: \mathbb{N} \rightarrow \prod_{i=0}^n X_i$  konvergiert, so können wir uns hiervon mit der gleichen Methode eine Teilfolge auswählen für die auch noch die  $(n+1)$ -te Komponente konvergiert.

Aber dann konvergiert die diagonale Teilfolge  $n \mapsto f(\tau_n(n))$  von  $f$ : Für jedes  $i \in \mathbb{N}$  ist sie aber dem  $i$ -ten Glied ja eine Teilfolge von  $n \mapsto f(\tau_i(n))$  und deren  $i$ -te Koordinate konvergiert per Annahme.  $\square$

**7.18. Beispiel** Mit dem Satz von Tychonov bewaffnet können wir nun leicht ein Beispiel eines kompakten aber nicht folgenkompakten Raums und umgekehrt angeben, beide ebenfalls mit einem Diagonalargument:

- (1) Es sei  $\mathcal{I}$  die Menge der monotone Injektionen  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . Dann ist  $\prod_{\sigma \in \mathcal{I}} [0, 1]$  nach 7.15 kompakt, aber nicht folgenkompakt: Es sei nämlich

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \prod_{\sigma \in \mathcal{I}} [0, 1], \quad n \longmapsto \left[ \sigma \mapsto \begin{cases} 1 & n \in \text{im}(\sigma) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \right]$$

und  $\tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  eine beliebige monotone Injektion (sodass  $f \circ \tau$  eine beliebige Teilfolge von  $f$  ist). Nun der Trick: Wir benutzen die Funktion  $\tau \circ 2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto \tau(2n)$  als Index im Produkt. Wir haben nun nämlich

$$f_{\tau(n)}(\tau \circ 2) = \begin{cases} 1 & n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und das konvergiert sicherlich (bei  $n \rightarrow \infty$ ) nicht (erst recht konvergiert  $f \circ \tau$  nicht). Es hat also  $f$  keine konvergente Teilfolge und damit ist das betrachtete Produkt nicht folgenkompakt.

Da  $\mathcal{I}$  und  $\mathbb{R}$  gleichmächtig sind (!), folgt auch dass  $\prod_{r \in \mathbb{R}} [0, 1] \cong \mathbb{F}(\mathbb{R}, [0, 1])$  mit der Topologie der punktweisen Konvergenz ebenfalls ein Beispiel eines kompakten aber nicht folgenkompakten Raums ist.

- (2) Und von der Menge

$$S = \{f: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \mid f(x) = 0 \text{ für nur abzählbar viele } x \in \mathbb{R}\}$$

hatten wir uns in Übungen überlegt, dass sie zwar folgenabgeschlossen in  $\mathbb{F}(\mathbb{R}, [0, 1])$  aber nicht abgeschlossen ist. Damit kann sie nach 7.8 nicht kompakt sein. Aber ist  $g: \mathbb{N} \rightarrow S$  eine Folge, so ist

$$F = \{x \in \mathbb{R} \mid g_n(x) \neq 0 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$$

immer noch abzählbar und es landet  $f$  in der Teilmenge

$$\{f: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \mid f(x) = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \setminus F\} \cong \prod_{i \in F} [0, 1].$$

Aber diese ist nach 7.17 immer noch folgenkompakt, also besitzt  $g$  eine dort konvergente Teilfolge (und diese konvergiert dann natürlich auch in  $S$ ).

- (3) Der Raum  $S$  ist zwar selbst nicht erstabzählbar, aber im Unterschied zu 7.4 gibt es auch erstabzählbare folgenkompakte Räume, die nicht kompakt sind. Der wohl einfachste ist der Raum die erste überabzählbare Ordinalzahl mit der Topologie die von ihren offenen Intervallen erzeugt wird (ich will das hier aber nicht weiter erklären).

Nun also erstmal zum Satz selbst. Er besitzt viele Beweise, allesamt nicht ganz einfach. Ich basiere meinen auf dem erst etwas später am anderen Ende der Welt gefundenen:

**7.19. Satz** (Alexander'sches Subbasenlemma, 1939) *Es sei  $X$  ein topologischer Raum und  $S$  eine Subbasis der Topologie. Besitzt dann jede Überdeckung von  $X$  durch Mengen in  $S$  eine endliche Teilüberdeckung, so ist  $X$  schon kompakt.*

Das Alexander'sche Lemma basiert wiederum auf:

**7.20. Theorem** (Zorn'sches Lemma) *Ist  $P$  eine nicht leere, partiell geordnete Menge, in der jede Kette nach oben beschränkt ist, so besitzt  $P$  ein maximales Element.*

Einen Beweis habe ich am Ende dieses Kapitels angefügt (ich werde dort auch kurz über andere Anwendungen reden; das Lemma hat nichts mit Topologie zu tun, und wird je nach Dozent schon in der linearen Algebren bewiesen, da aus ihm auch die Existenz von Basen in beliebigen Vektorräumen folgt). Zur Erinnerung: Eine *Kette* in  $P$  ist einfach eine Teilmenge  $K \subseteq P$ , die durch die Einschränkung der Ordnungsrelation auf  $P$  total geordnet wird, sie heißt *nach oben beschränkt*, wenn es ein  $p \in P$  mit  $c \leq p$  für alle  $c \in K$ , und ein *maximales* Element  $p \in P$  ist eines, für das  $p \leq p'$  schon  $p = p'$  impliziert. Zu unterscheiden sind solche Elemente von *größten* bei denen sogar  $p' \leq p$  für alle  $p' \in P$  gelten muss.

BEWEIS VON 7.19. Es sei  $C \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$  die Menge all derer offenen Überdeckungen von  $X$ , die keine endliche Teilüberdeckung besitzen. Wir wollen also zeigen, dass  $C = \emptyset$  gilt. Nehmen wir an, dem ist nicht so. Dann stattdessen wir  $C$  mit der Teilmengenrelation aus und beobachten, dass  $C$  die Annahme des Zorn'schen Lemmas erfüllt: Ist nämlich  $K \subseteq C$  eine (nicht-leere, aber sonst ist ja eh nichts zu tun) Kette, so ist offensichtlich auch  $\mathcal{F} = \bigcup_{\mathcal{G} \in K} \mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$  eine offene Überdeckung von  $X$  und offenbar gilt  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$  für alle  $\mathcal{G} \in K$ . Aber  $\mathcal{F}$  hat auch keine endliche Teilüberdeckung: Würden nämlich etwa  $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{F}$  eine Überdeckung bilden, so gäbe es per Konstruktion  $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n \in K$  mit  $U_i \in \mathcal{G}_i$  für alle  $1 \leq i \leq n$ . Aber da  $K$  eine Kette bildet, tut das auch  $\{\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n\}$  und jede endliche total geordnete Menge hat natürlich ein größtes Element (sie ist ja sogar ordnungsisomorph zu  $\{0, \dots, l\}$  für ein  $l \in \mathbb{N}$ ), etwa  $\mathcal{G}_k$ . Dann würde aber  $U_i \in \mathcal{G}_k$  für alle  $1 \leq i \leq n$  folgen, sodass  $\mathcal{G}_k$  eine endliche Teilüberdeckung hätte, im Widerspruch zu  $\mathcal{G}_k \in K \subseteq C$ . Damit folgt insgesamt  $\mathcal{F} \in C$ , sodass  $\mathcal{F}$  wirkliche eine obere Schranke an  $K$  ist.

Wir erhalten also aus dem Zorn'schen Lemma ein maximales Element  $\mathcal{M}$  von  $C$ , also eine offene Überdeckung von  $X$ , die keine endliche Teilüberdeckung besitzt, für die aber  $\mathcal{M} \cup \{U\}$  für jedes offene  $U \subseteq X$  mit  $U \notin \mathcal{M}$  eine solche Teilüberdeckung besitzt.

Die Behauptung ist nun, dass dann auch  $\mathcal{M} \cap S$  noch eine Überdeckung von  $X$  ist. Diese hat natürlich immer noch keine endliche Teilüberdeckung, besteht aber nun nur noch aus Mengen aus der Subbasis  $S$ . Mit anderen Worten: Gibt es überhaupt eine offene Überdeckung von  $X$ , die keine endliche Teilüberdeckung besitzt, dann gibt es auch eine aus Mengen in  $S$ , und das ist genau die Aussage des Subbasenlemmas.

Bleibt noch die Behauptung zu zeigen. Nehmen wir dafür an, dass etwa  $x \in X \setminus \bigcup_{U \in \mathcal{M} \cap S} U$ . Da  $\mathcal{M}$  eine offene Überdeckung von  $X$  ist, finden wir natürlich ein  $V \in \mathcal{M}$  mit  $x \in V$ . Und da  $S$  eine Subbasis ist, gibt es nach 3.7  $T_1, \dots, T_n \in S$  mit  $x \in T_1 \cap \dots \cap T_n \subseteq V$ . Sicherlich kann nicht  $T_i \in \mathcal{M}$  gelten (dann wäre  $x$  ja von  $\mathcal{M}$  überdeckt), sodass  $\mathcal{M} \cup \{T_i\}$  für jedes  $1 \leq i \leq n$  eine endliche Teilüberdeckung besitzen muss, etwa

$$X = T_i \cup \bigcup_{j=1}^{m_i} U_{i,j}$$

mit  $m_i \in \mathbb{N}$  und  $U_{i,j} \in \mathcal{M}$ . Aber dann folgt offenbar auch

$$X = (T_1 \cap \dots \cap T_n) \cup \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^{m_i} U_{i,j}$$

und damit

$$X = V \cup \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^{m_i} U_{i,j},$$

was eine endlich Teilüberdeckung von  $\mathcal{M}$  wäre. Aber so etwas kann es ja per Konstruktion nicht geben, also muss  $\mathcal{M} \cap S$  den Punkt  $x$  nicht verfehlen, und ist damit wie gewünscht auch eine Überdeckung von  $X$ .  $\square$

Hiermit ist der Beweis des Satzes von Tychonov nun schnell erbracht:

BEWEIS VON 7.15. Sei etwa  $Y = \prod_{i \in I} X_i$  mit  $X_i$  kompakt. Dann bilden die Mengen

$$U \times \prod_{j \neq i} X_j = \text{pr}_i^{-1}(U)$$

mit  $U \subseteq X_i$  offen eine Subbasis  $S$  der Produkttopologie auf  $Y$  (so haben wir diese ja gerade definiert). Sei nun  $\mathcal{F}$  eine offene Überdeckung von  $Y$  durch Mengen in  $S$ .

Betrachte dann die Mengen

$$\mathcal{F}_i = \{U \subseteq X_i \mid \text{pr}_i^{-1}(U) \in \mathcal{F}\}.$$

Ich behaupte nun, dass es ein  $i \in I$  gibt derart, dass  $\mathcal{F}_i$  eine offene Überdeckung von  $X_i$  ist. Dann können wir uns per Annahme an  $X_i$  eine offene Teilüberdeckung  $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{F}_i$  hernehmen und erhalten, dass  $\text{pr}_i^{-1}(U_1), \dots, \text{pr}_i^{-1}(U_n)$  eine offene Teilüberdeckung von  $\mathcal{F}$  ist. Und dann schlägt das Alexander'sche Lemma zu.

Für die verbleibende Behauptung nehmen wir an, dass es für jedes  $i \in I$  ein  $x_i \in X_i \setminus \bigcup_{U \in \mathcal{F}_i} U$  gibt. Eine Auswahl solche Punkte definiert dann einen Punkt  $x \in Y$  und per Konstruktion gilt dann sogar

$$x \in Y \setminus \bigcup_{i \in I, U \in \mathcal{F}_i} \text{pr}_i^{-1}U = Y \setminus \bigcup_{V \in \mathcal{F}} V,$$

im Widerspruch dazu, dass  $\mathcal{F}$  eine offene Überdeckung ist. □

## 8. Das Zorn'sche Lemma\*

Das folgende Kapitel dient hauptsächlich dazu das Zorn'sche Lemma 7.20 zu beweisen. Ich wiederhole noch einmal die Aussage:

Ist  $P$  eine nicht leere, partiell geordnete Menge, in der jede Kette nach oben beschränkt ist, so besitzt  $P$  ein maximales Element.

Zur Illustration vorher aber noch ein paar Anwendungen in anderen Teilen der Mathematik, um zu demonstrieren, dass dieses Lemma wirklich nicht speziell mit Topologie zu tun hat.

**8.1. Beispiel** (1) Der allgemeine Basisergänzungssatz: Sind  $S \subseteq E$  Teilmengen eines Vektorraums  $V$  über einem Körper  $K$ , und ist  $S$  linear unabhängig und  $E$  ein Erzeugendensystem von  $V$ , gibt es ein  $S \subseteq B \subseteq E$  derart, dass  $B$  eine Basis von  $V$  ist; angewendet auf  $S = \emptyset$  und  $E = V$  steht hier insbesondere, dass jeder Vektorraum eine Basis besitzt.

Zum Beweis sei  $P \subseteq \mathcal{P}(V)$  die Menge aller linear unabhängigen Teilmengen  $U \subseteq V$  mit  $S \subseteq U \subseteq E$ . Dann ist  $P$  nicht leer, weil  $S \in P$  und  $P$  genügt der Zorn'schen Kettenbedingung, wenn wir es mittels der Teilmengenrelation ordnen: Ist  $K \subseteq P$  eine Kette, so ist nämlich  $F = \bigcup_{U \in K} U$  wieder linear unabhängig (und damit eine obere Schranke für  $K$ ), weil eine Linearkombination der  $0 = \sum_{j=0}^n x_j \cdot \lambda_j$  durch Elemente  $x_j \in F$  und  $\lambda_j \in K$  nur endliche viele Terme enthält, wir also  $U_1, \dots, U_n \in K$  wählen können mit  $x_i \in U_i$ , von denen (weil endliche Ketten immer ein größtes Element haben) eine die größte ist, und damit  $x_i \in U_k$ . Aber  $U_k$  ist per Annahme linear unabhängig, also  $\lambda_i = 0$  und damit  $F \in P$ .

Das Zorn'sche Lemma liefert also eine maximale linear unabhängige Teilmenge  $B$  zwischen  $S$  und  $E$ . Und jede solche ist schon eine Basis: Für ein  $e \in E$ , ist nämlich  $B \cup \{e\}$  wegen der Maximalität von  $B$  entweder einfach nur  $B$  (und damit  $e \in B$ ) oder  $B \cup \{e\}$  ist linear abhängig, also (und nur hier geht ein, dass wir einen Körper zugrunde gelegt haben)  $e$  eine Linearkombination von Elementen aus  $B$ . In jedem Falle gilt  $e \in \langle B \rangle$  und damit insgesamt  $V = \langle E \rangle = \langle B \rangle$ .

(2) Der Existenzsatz für Restklassenkörper: Jeder kommutative Ring  $R$  besitzt einen surjektiven Ringhomomorphismus in einen Körper. Diese Behauptung ist nämlich äquivalent dazu, dass  $R$  ein maximales Ideal besitzt (also eines welches unter den Ideal  $I \subsetneq R$  maximal ist). Auf der einen Seite ist der Kern eines solchen Homomorphismus  $\varphi: R \rightarrow K$  ein maximales Ideal: Ist  $\ker(\varphi) \subseteq I \subseteq R$ , so ist  $\varphi(I) \subseteq K$  ebenfalls ein Ideal (hier geht die Surjektivität von  $\varphi$  ein) und ein Körper hat  $\{0\}$  und  $\{K\}$  als einzige Ideale (die sind

ja insbesondere  $K$ -Untervektorräume von  $K$ ). Aber im Falle  $\varphi(I) = \{0\}$  folgt offenbar  $I = \ker(\varphi)$  und im Falle  $K = \varphi(I)$  folgt  $I = R$  (für ein  $r \in R$  gibt es per Annahme ein  $i \in I$  mit  $\varphi(r) = \varphi(i)$ , also  $i - r \in \ker(\varphi) \subseteq I$  und damit  $r \in I$ ). Und ist umgekehrt  $I \subseteq R$  maximal, so ist  $R/I$  ein Körper (auf den  $R$  offensichtlich surjiziert): Ist nämlich  $[x] \in R/I \setminus \{0\}$ , so ist  $x \in R \setminus I$  und damit das von  $x$  und  $I$  erzeugte Ideal  $\langle x, I \rangle$  echt größer als  $I$ . Aber da  $I$  maximal ist heißt das  $\langle x, I \rangle = R$ . Insbesondere gibt es ein  $r \in R$  und ein  $i \in I$  mit  $rx + i = 1$  und damit  $[r] \cdot [x] = [1]$  in  $R/I$ .

Und die Menge  $P$  der echten Ideal von  $R$  an (wir können sogar nur die betrachten, die zusätzlich noch ein gegebenes Ideal  $J$  enthalten), erfüllt die Zorn'sche Kettenbedingung: Man prüft leicht, dass die Vereinigung einer Kette von Ideal wieder ein Ideal ist. Um sie als obere Schranke zu erkennen bleibt also noch zu prüfen, dass sie ein echtes Ideal (also nicht ganz  $R$ ) ist. Aber ein Ideal  $I \subseteq R$  ist echt genau dann, wenn  $1 \notin I$  und das offenbar stabil unter Vereinigungen. Zorn's Lemma liefert uns also nun genau ein maximales Ideal (das  $J$  enthält; und auch die Kommutativität von  $R$  ging hier nirgendwo ein! Aber ein nicht kommutativer Ring braucht keinen Homomorphismus in irgendeinen Schiefkörper zu besitzen, wo haben wir sie im ersten Teil benutzt?)

- (3) Aus der Existenz von maximalen Idealen folgt etwa die Existenz von algebraischen Abschlüssen: Ist nämlich  $K$  ein Körper, so betrachte den Polynomring  $R = K[X_f \mid f \in K[T] \text{ nicht konstant}]$  mit einer Variablen für jedes nicht konstante Polynom in  $K$ , und in diesem Ring das Ideal  $\langle f(X_f) \mid f \in K[T] \text{ nicht konstant} \rangle$ . Von diesem prüft man nun, dass es ein echtes Ideal ist und wählt ein darüber liegendes maximales Ideal  $m$ . Der Körper  $K$  bettet dann offensichtlich in den größeren Körper  $K_1 = R/m$  ein. Es hat nun per Konstruktion jedes nicht-konstante Polynom  $f \in K[T]$  in  $K_1$  eine Nullstelle, nämlich  $[X_f]$ . Diese Elemente sind also insbesondere algebraisch über  $K$  und da sie  $K_1$  erzeugen es eine algebraische Erweiterung von  $K$ . Über vielen Körper ist  $K_1$  auch für jede Wahl von  $m$  schon algebraisch abgeschlossen (für perfekte Körper ist das etwa nach dem Satz von primitiven Element der Fall). Im Allgemeinen, muss man aber einen noch größeren Körper konstruieren: Man wende nämlich das gleiche Prozedere induktiv an um aus  $K_n$  einen Körper  $K_{n+1}$  zu erhalten, in dem jedes nicht-konstante Polynom aus  $K_n$  eine Nullstelle besitzt und setze schlussendlich  $\bar{K} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ . Jedes nicht konstante Polynom über  $K_\infty$  hat nur endlich viele Koeffizienten, lebt also schon über einem  $K_n$  und hat damit in  $K_{n+1}$  (also erst recht in  $K_\infty$ ) eine Nullstelle. Und auch die Algebraizität über  $K$  überträgt sich nach einem grundlegenden Satz der Körpertheorie durch Zwischenerweiterungen, also ist  $\bar{K}$  wirklich ein algebraischer Abschluss von  $K$ .

Und obwohl die Konstruktion von vielen Wahlen abhängt, sind je zwei algebraische Abschlüsse  $L, M$  von  $K$  isomorph zueinander, was eine weitere schöne Anwendung des Zorn'schen Lemmas ist: Hierzu betrachte man die Menge  $P$  aller Paare  $(U, \varphi)$  wo  $K \subseteq U \subseteq L$  ein Zwischenkörper ist und  $\varphi: U \rightarrow M$  ein  $K$ -Homomorphismus. Setzt man dann noch  $(U, \varphi) \leq (U', \varphi')$  falls  $U \subseteq U'$  und  $\varphi'|_U = \varphi$ , so kann man das Zorn'sche Lemma auf  $P$  anwenden und erhält einen maximalen Unterkörper  $V$  von  $L$ , der sich in  $M$  einbettet. Aber wäre dieser nicht schon ganz  $L$ , so könnte man ihm noch ein Element  $\alpha \in L \setminus V$  hinzufügen und es ist ein weitere grundlegender Satz der Körpertheorie, dass eine Körperabbildung  $V[\alpha] \rightarrow M$ , die einen gegebenen Körperhomomorphismus  $V \rightarrow M$  fortsetzt genau einer Nullstelle des Minimalpolynoms von  $\alpha$  entspricht. Aber weil  $M$  über  $K$  algebraisch abgeschlossen ist, ist  $M$  das nach einer kleinen Überlegung auch über  $\varphi(L)$ , sodass so eine Nullstelle existiert. Wir können also  $\varphi$  auf  $V[\alpha]$  fortsetzen, was der Maximalität von  $(V, \varphi)$  widerspricht. Es muss also schon  $V = L$  gelten. Und mit  $L$  ist auch  $\varphi(L) \subseteq M$  algebraisch abgeschlossen und das erzwingt schon  $\varphi(L) = M$ , also ist  $\varphi$  der gesuchte Isomorphismus.

- (4) Noch grundlegender ist wohl der Zermelo'sche Vergleichssatz, der (zusammen mit dem Satz von Cantor und Bendixon) der Theorie der Kardinalzahlen zugrunde liegt: Sind  $A$  und  $B$  Mengen, so existiert eine Injektion  $A \rightarrow B$  oder aber eine Injektion  $B \rightarrow A$ .

Hierzu betrachte man die Menge  $P$  der Tripel  $(X, Y, f)$ , wo  $X \subseteq A$ ,  $Y \subseteq B$  und  $f: A \rightarrow B$  bijektiv sei. Auf  $P$  definiere man eine Relation  $\leq$  derart, dass  $(X, Y, f) \leq (X', Y', f')$  genau dann, wenn  $X \subseteq X'$ ,  $Y \subseteq Y'$  und  $f'(x) = f(x)$  für alle  $x \in X$ . Offenbar ist  $\leq$  wie im vorigen Beispiel eine partielle Ordnung. Und  $(P, \leq)$  erfüllt die Voraussetzungen von Zorn's Lemma: Sicherlich ist  $P$  nicht leer, etwa ist  $(\emptyset, \emptyset, \emptyset) \in P$  (und falls  $A$  oder  $B$  leer sind, ist das auch das einzige Element). Und ist  $K \subseteq P$  eine Kette, so beobachtet man, dass wie in allen vorigen Beispielen die Vereinigung (in allen drei Komponenten gebildet) eine obere Schranke an  $K$  ist.

Wir erhalten also ein maximales Element  $(M, N, g)$  von  $F$ . In so einem Element muss dann aber  $M = A$  oder  $N = B$  gelten: Sind sonst  $a \in A \setminus M$  und  $b \in B \setminus N$  so ist auch  $X \cup \{a\}, Y \cup \{b\}$  zusammen mit der Erweiterung von  $g$ , die noch  $a$  auf  $b$  schickt, wieder ein Element von  $P$  und offenbar größer als  $(X, Y, g)$ . Im Falle  $M = A$  ist aber  $g \subseteq A \times B$  eine Injektion  $A \rightarrow B$  im Falle  $T = B$  definiert das Inverse von  $g$  eine Injektion  $B \rightarrow A$ .

- (5) Es gibt noch etliche Beispiel dieser Art: Dass jeder Graph einen aufspannenden Baum hat beweist man, indem man sich überlegt, dass aufspannenden Bäume genau die maximalen Bäume eine Graphen sind, und sich auf die Menge aller Bäume das Zorn'sche Lemma anwenden lässt. Dass sich jedes lineare Funktional von einem abgeschlossenen Teilraum eines Banachraums auf den ganzen Raum fortsetzen lässt (das ist der Satz von Hahn-Banach) zeigt man, indem man Paare aus Unterräumen mit einer Fortsetzung des Funktionals betrachtet, auf die hoffentlich mittlerweile offensichtliche Weise ordnet, mittels Zorn'schem Lemma ein maximales Element generiert und von diesem zeigt, dass es sich noch vergrößern ließe, wäre es nicht schon auf dem ganzen Raum definiert. Dass jede Körpererweiterung  $L/K$  eine transzendente Teilmenge  $X$  besitzt, sodass  $L/K(X)$  algebraisch ist, zeigt man indem man mit dem Zorn'schen Lemma eine maximale produziert, und so weiter.
- (6) Es folgt auch allerlei Unerwartetes aus dem Zorn'schen Lemma: Etwa beweist man mit ihm im Zuge der Maßtheorie die Existenz von nicht Lebesgue messbaren Teilmengen von  $\mathbb{R}$ , das Banach-Tarski-Paradoxon, dass sich die Kugel  $D^3$  in endlich viele Teile zerlegen lässt, die sich durch starre Bewegung in zwei disjunkte Kopien von  $D^3$  (beide immer noch mit Radius 1!) überführen lassen, oder auch dass es sowohl mehr Körperautomorphismen von  $\mathbb{C}$  als nur  $\text{id}$  und die komplexe Konjugation gibt, also auch, dass es nicht surjektive Körperhomomorphismen  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  gibt (also  $\mathbb{C}$  echte Teilkörper enthält, zu denen es isomorph ist).

Nun zum Beweis des Zorn'schen Lemmas 7.20. Wieder gibt es hierfür viele Methoden, die folgende wurde vom Amerikaner Jonathan Lewin 1991, also beinahe 100 Jahre nach Zorns ursprünglichem Beweis gefunden. Ich erinnere einmal daran, dass eine *Wohlordnung* eine totale Ordnung auf einer Menge ist bezüglich der jede Teilmenge ein kleinstes Element hat. Jede endliche totale Ordnung hat diese Eigenschaft, und auch die natürlichen Zahlen.

BEWEIS VON 7.20. Nehmen wir an  $M$  hätte kein maximales Element und setzen  $\text{Ch}(M) = \{C \subseteq M \mid C \text{ ist eine Kette in } M\}$ . Dann nimmt die Funktion

$$\text{Ch}(M) \longrightarrow \mathcal{P}(M), \quad C \longmapsto \{m \in M \mid \forall c \in C: c < m\}$$

nie den Wert  $\emptyset$  an, denn per Annahme gibt es zu  $C$  ein  $u \in M$  mit  $c \leq u$  für alle  $c \in C$ , aber da  $u$  nicht maximal ist gibt es noch ein  $m \in M$  mit  $u < m$ .

Wir können dann also eine (Auswahl-)Funktion  $f: \text{Ch}(M) \rightarrow M$  mit der Eigenschaft finden, dass  $c < f(C)$  für alle  $c \in C$  und Ketten  $C \subseteq M$ . Dies wollen wir zum Widerspruch führen. Dafür benutzen wir folgenden Trick: Wir nennen eine Menge  $K \subseteq M$   $f$ -konform, falls gilt

- (1)  $\leq$  restringiert zu einer Wohlordnung auf  $K$  (insbesondere ist  $K$  eine Kette), und
- (2) für jedes  $k \in K$  gilt  $k = f(I(K, k))$ .

wobei  $I(K, k) = \{x \in K \mid x < k\}$  (ein sogenanntes Initialsegment). Natürlich ist  $\emptyset$   $f$ -konform, aber sobald  $K \neq \emptyset$ , hat es ein kleinstes Element  $x$ . Aber dann gilt  $I(K, x) = \emptyset$  und damit

$x = f(\emptyset)$  unabhängig von  $K$ , und in der Tat ist  $\{f(\emptyset)\}$   $f$ -konform. Ähnlich ist die einzige  $f$ -konforme Teilmenge mit 2 Elementen  $\{f(\emptyset), f(\{f(\emptyset)\})\}$  und so weiter.

Wir behaupten nun, dass

$$W = \bigcup \{K \subseteq M \mid K \text{ ist } f\text{-konform}\} \subseteq M$$

selbst  $f$ -konform ist und damit sicherlich die größte aller  $f$ -konformen Teilmengen von  $M$  (bzgl. der Relation  $\subseteq$  auf  $\mathcal{P}(M)$ ). Aber es ist dann offenbar auch  $W \cup \{f(W)\}$   $f$ -konform und per Konstruktion von  $f$  gilt aber  $f(W) \notin W$ , was den gewünschten Widerspruch liefert.

Es bleibt noch die Behauptung zu verifizieren und hierfür beweisen wir zunächst: Sind  $A$  und  $A'$   $f$ -konforme Teilmengen von  $M$ , so ist entweder  $A$  ein Initialsegment von  $A'$  oder andersherum.

Stimmen die beiden Mengen überein, so gibt es nicht zu tun. Ansonsten muss also  $A \setminus A' \neq \emptyset$  oder  $A' \setminus A \neq \emptyset$  gelten. Wir behandeln den ersten Fall. Sei dann  $x$  das kleinste Element von  $A \setminus A'$ , sodass per Definition  $I(A, x) \subseteq A'$  gilt. Wir behaupten, dass hier Gleichheit besteht. Wenn nicht, seien  $y$  das kleinste Element von  $A' \setminus I(A, x)$  (die Annahme ist ja gerade, dass dies nicht leer ist) und  $z$  das kleinste Element von  $A' \setminus I(A', y)$ . Dann gelten wieder per Konstruktion  $I(A', y) \subseteq I(A, x)$  und  $I(A, z) \subseteq I(A', y)$ . Die zweite Inklusion ist aber sogar eine Gleichheit: Ist  $a' \in I(A', y)$ , so folgt  $a' \in I(A, x)$  und damit  $a' \in A$  und  $a' < x$ . Wegen  $a', z \in A$  sind dann  $a'$  und  $z$  vergleichbar. Wäre  $z \leq a'$  dann würde sowohl  $z < x$  als auch  $z < y$  gelten. Nach Definition von  $x$  folgt dann  $z \in A'$ , und damit  $z \in I(A', y)$ , was per definitionem nicht sein kann. Also muss  $a' < z$  sein und damit  $a' \in I(A, z)$  wie gewünscht.

Aber dann haben wir  $y = f(I(A', y)) = f(I(A, z)) = z$  wegen der  $f$ -Komformität von  $A$  und  $A'$ . Es kann dann aber nicht auch noch  $x = z$  gelten, da  $y \in A'$ , aber  $x \notin A'$ . Aber wegen  $x, z \in A$  sind  $x$  und  $z$  vergleichbar, und wegen

$$I(A, z) \subseteq I(A', y) \subseteq I(A, x)$$

kann nicht  $x < z$  gelten. Aber auch  $z < x$  kann nicht sein, da dann  $y = z \in I(A, x)$  im Widerspruch zur Definition von  $y$  gelten würde. Insgesamt, folgt also  $A' = I(A, x)$  wie gewünscht.

Wir können nun verifizieren, dass  $W$  in der Tat  $f$ -konform ist, was den Beweis beendet. Zunächst ist  $W$  total geordnet: Dass  $\leq$  wieder eine partielle Ordnung auf  $W$  definiert ist klar, und sind  $w, w' \in W$  gegeben, etwa mittels  $w \in A$  und  $w' \in A'$  mit  $A, A'$   $f$ -konform, so gilt entweder  $A \subseteq A'$  oder andersherum. In jedem Falle ist  $\{w, w'\}$  in einer  $f$ -konformen Menge enthalten, da diese total geordnet sind, insbesondere vergleichbar.  $W$  ist aber auch wohl geordnet: Ist  $\emptyset \neq T \subseteq W$ , so wähle ein  $t \in T$  und dann ein  $A$   $f$ -konform mit  $t \in A$ . Ist dann  $x$  das kleinste Element von  $A \cap T$ , so behaupten wir, dass  $x$  sogar in  $T$  kleinst ist. Ist nämlich  $w \in T$  gegeben, etwa mit  $w \in A'$  und  $A'$   $f$ -konform. Gilt  $w \in A$  so folgt offenbar  $x \leq w$  per Definition von  $x$ . Gilt  $w \notin A$  so muss nach Vorüberlegung  $A \subset A'$  ein Initialsegment sein. Aber dann gilt  $x \leq a'$ , ja sogar für jedes  $a' \in A' \setminus A$ .

Zum Schluss gilt für  $w \in W$  mit  $w \in A$  mit  $A$   $f$ -konform schon  $I(w, W) = I(w, A)$ , denn jedes  $a \in W$ , etwa mit  $a \in A'$  und  $A'$   $f$ -konform, und  $a < w$  muss ja bei  $A' \subseteq A$  sicherlich  $a \in A$  gelten und sonst ist  $A \subset A'$  ein Initialsegment, was auch  $a \in A$  impliziert. Aber damit gilt

$$w = f(I(w, A)) = f(I(w, W))$$

und  $W$  ist  $f$ -konform. □

## 9. Der Satz von Gelfand-Naimark\*

Ziel dieses Abschnitts ist eine Anwendung des Satzes von Tychonov zu skizzieren, die aber noch viele weitere Zutaten hat, die über unsere Vorlesung weit hinausgehen, von der ich aber hoffe, dass sie ein bisschen das Zusammenspiel der verschiedensten Disziplinen der Mathematik illustriert und wie sich aus dem Flickenteppich der Vorlesungen langsam ein großes Ganzes zusammenfügt. Dieser Exkurs wird eine Weile dauern (siehe 9.11 unten für den entscheidenden Moment), aber nehmen Sie diesen Abschnitt als ein kleines Märchen mit ans Bett!

Zum Start erinnere ich einmal an den Spektralsatz aus den linearen Algebravorlesungen, und zu allererst an dessen Zutaten: Sei dazu  $V$  ein endlich dimensionaler  $\mathbb{C}$ -Vektorraum ausgestattet

mit einem Skalarprodukt. Aufgrund dessen positiver Definitheit ist die Abbildung

$$V \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C}), \quad v \longmapsto \langle v, - \rangle$$

injektiv und damit, weil beide Seite gleiche Dimension haben sogar bijektiv. Es folgt hieraus leicht, dass für jede  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung  $A: V \rightarrow V$  genau eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung  $A^*: V \rightarrow V$  mit

$$\langle Av, w \rangle = \langle v, A^*w \rangle$$

für alle  $v, w \in V$ , das Adjungierte von  $A$ : Es ist ja  $\langle A-, w \rangle \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$  und  $A^*w$  ist dann einfach das Urbild unter obiger Abbildung. Für  $V = \mathbb{C}^n$  ist  $A^*$  einfach die komplex konjugiert und transponierte von  $A$ .

**9.1. Theorem** (Spektralsatz) *Ist  $V$  ein endlich dimensionaler  $\mathbb{C}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt und  $N: V \rightarrow V$   $\mathbb{C}$ -linear. Dann sind äquivalent:*

- (1) *Es gibt eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}$  die aus Eigenvektoren von  $N$  besteht, und*
- (2)  *$N$  ist normal, also  $N \circ N^* = N^* \circ N$ .*

Im Falle  $V = \mathbb{C}^n$  sagt die erste Eigenschaft genau, dass es ein  $A \in U(n)$  (also  $AA^* = \mathbb{1}$ ) derart, dass  $ANA^{-1}$  eine Diagonalmatrix ist; mit anderen Worten  $N$  ist unitär diagonalisierbar.

Der Satz den ich in diesem Kapitel ansprechen will, dreht sich um die Verallgemeinerung auf Hilberträume unendlicher Dimension. Sei also nun  $V$  ein solcher, also ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum, ausgestattet mit einem Skalarprodukt, der nun nicht mehr unbedingt endlich dimensional ist, aber immer noch vollständig (im Sinne dass alle Cauchyfolgen bezüglich der vom Skalarprodukt induzierten Norm konvergieren) und weiter  $A: V \rightarrow V$  eine stetige  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung. Es ist dann immer noch richtig, dass

$$V \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C}), \quad v \longmapsto \langle v, - \rangle$$

injektiv ist, und sein Bild besteht genau aus den stetigen  $\mathbb{C}$ -linearen Abbildungen  $V \rightarrow \mathbb{C}$ . Da  $\langle A-, w \rangle: V \rightarrow \mathbb{C}$  für jedes  $w \in V$  natürlich stetig ist, folgt, also, dass jedes stetige  $N$  wieder ein adjungiertes  $N^*: V \rightarrow V$  besitzt und man prüft leicht, dass auch  $N^*$  wieder stetig ist.

**9.2. Beispiel** Ein typisches Beispiel für  $V$  ist zum Beispiel der Raum

$$L^2([0, 1]) = \left\{ f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ ist Lebesgue integrierbar mit } \int_0^1 |f(t)|^2 dt < \infty \right\} / N,$$

wo

$$N = \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \mid f(x) = 0 \text{ für alle } x \in [0, 1] \text{ außerhalb einer Nullmenge}\},$$

mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt;$$

wer das Lebesgueintegral nicht kennt, denke einfach überall an stetige Funktionen (aber dann erhält man keinen vollständigen Raum). Und gegeben ein lebesgueintegrierbares  $k: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{C}$  ist ein typischer Operator, den man betrachten möchte

$$\int k: L^2([0, 1]) \longrightarrow F([0, 1], \mathbb{C})/N \quad f \longmapsto \int_0^1 k(t, -)f(t)dt,$$

man nennt  $k$  den Integralkern dieser Abbildung. Es gibt nun verschiedenste Wachstumsbedingungen an  $k$  die garantieren, dass er alle  $L^2$ -Funktionen wieder auf  $L^2$ -Funktionen schickt. Die einfachste ist die Hilbert-Schmidt-Bedingung  $\int_0^1 \int_0^1 |k(s, t)|^2 ds dt < \infty$  (die insbesondere für stetiges  $k$  natürlich immer erfüllt ist), aber zum Beispiel reicht auch die viel schwächere Schur-Bedingung, dass es eine lebesgueintegrierbare Funktion  $p: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  und  $c > 0$  gibt mit

$$\int_0^1 |k(s, x)|p(s)ds, \int_0^1 |k(x, t)|p(t)dt \leq c \cdot p(x).$$

So ein Operator ist dann normal, wenn

$$\int_0^1 k(t, x)\overline{k(t, y)}dt = \int_0^1 k(x, t)\overline{k(y, t)}dt$$

für alle  $x, y \in [0, 1]$  gilt, was zum Beispiel für reellwertiges  $k$  mit  $k(s, t) = k(t, s)$  immer erfüllt ist.

Ich hoffe, den Sinn des Studiums solcher Abbildungen kann ich mir mit dem Stichwort "Differentialgleichungen" sparen.

Aber unser Schiffchen läuft hier sofort auf Grund: Es gibt normale Operatoren  $L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$  die überhaupt keine Eigenwerte besitzen, also sicherlich nicht diagonalisierbar sind. Ein einfaches Beispiel

$$\mu: L^2([0, 1]) \longrightarrow L^2([0, 1]), \quad f \longmapsto \text{id} \cdot f :$$

Es ist offenbar

$$\langle \mu(f), g \rangle = \int_0^1 t f(t) g(t) dt = \langle f, \mu(g) \rangle,$$

sodass  $\mu^* = \mu$  und damit ist  $\mu$  sicherlich normal. Aber ist  $\lambda \in \mathbb{C}$  und  $\mu(f) = \lambda \cdot f$ , so bedeutet das genau, dass

$$x \cdot f(x) = \lambda \cdot f(x)$$

für alle  $x \in [0, 1]$  (außerhalb einer Nullmenge) gilt. Aber das liefert offenbar  $f = 0$  (außerhalb einer Nullmenge, aber damit immer noch  $f = 0 \in L^2([0, 1])$ ).

Nun kann man Bedingungen stellen, die ein solches Verhalten ausschließen: Eine lineare Abbildung  $A: V \rightarrow W$  zwischen topologischen Vektorräumen über  $\mathbb{C}$  (oder  $\mathbb{R}$ ) heißt *kompakt*, wenn es eine Umgebung  $0 \in U \subseteq V$  gibt, für die  $\overline{f(U)} \subseteq W$  kompakt ist. Ist  $V$  endlich dimensional, so gibt es natürlich eine kompakte Umgebung  $U$  von  $0$  in  $V$ , und damit ist dann auch  $f(U)$  kompakt, sodass dann jedes  $A$  kompakt ist.

Als einen der ersten wirklich interessanten Sätze einer Funktionalanalysisvorlesung strebt man dann meist folgende Version des Spektralsatzes:

**9.3. Theorem** *Ist  $V$  ein Hilbertraum und  $N: V \rightarrow V$  eine stetige, kompakte, normale  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung, so gibt es eine Orthonormalbasis von  $V$  die aus Eigenvektoren von  $N$  besteht.*

Als einziges Wort der Warnung sei erwähnt, dass Orthonormalbasis hier im Sinne der Funktionalanalysis gemeint ist, also eine Ansammlung von orthonormalen Vektoren  $B \subseteq V$  mit der Eigenschaft, dass  $\overline{\langle B \rangle} = V$  (und nicht  $\langle B \rangle = V$  wie man das in der linearen Algebra wohl fordern würde). Aber die Stetigkeit von  $N$  (zusammen mit der Hausdorffeigenschaft von  $V$ ) impliziert ja insbesondere, dass  $N$  durch seine Einschränkung auf jeden dichten Unterraum bestimmt ist; hier verliert man also nichts. Und der Satz kommt in Wahrheit natürlich nicht nur mit einer Existenzaussage daher, sondern genau die der Spektralsatz im endlich dimensionalen Fall mit einer Anleitung, wie man so eine Orthogonalbasis finden kann. Im Beispiel der Integraloperatoren von oben garantiert die Hilbert-Schmidt-Bedingung an  $k$ , dass  $\int_k: L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$  kompakt ist und das schlachtet man dann zur Lösung von Differentialgleichungen eben aus.

Aber was tun, wenn der Operator, der gerade von Interesse ist, eben nicht kompakt ist? Darum soll sich dieser Abschnitt drehen. Die erste Beobachtung ist, dass die Nichtexistenz von Eigenwerten nur in gewisser Weise harmlose Gründe hat. Für einen endlich dimensionalen Vektorraum  $V$  ist eine Abbildung  $A: V \rightarrow V$  ja schließlich injektiv genau dann, wenn sie surjektiv ist, genau dann, wenn sie invertierbar ist. Das stimmt in unendlich dimensionalen Räumen eben nicht mehr. Es kann deshalb für gegebenes  $A$ , wenn  $V$  nicht mehr endlich dimensional ist, eben die Abbildung  $\lambda \text{id}_V - A$  injektiv aber nicht invertierbar sein. Wir setzen daher einmal:

**9.4. Definition** *Ist  $V$  ein topologischer  $\mathbb{C}$ -Vektorraum, und  $A: V \rightarrow V$  stetig und  $\mathbb{C}$ -linear, so heißt  $\lambda \in \mathbb{C}$  ein *Spektralwert* von  $A$ , wenn  $\lambda \cdot \text{id}_V - A$  nicht (stetig!) invertierbar ist. Die Menge  $\text{Spec}(A) \subseteq \mathbb{C}$  der Spektralwerte von  $A$ , heißt das *Spektrum* von  $A$ .*

Ist  $V$  endlich dimensional, so besteht das Spektrum eben genau aus den Eigenwerten von  $A$  (und das gleiche gilt für kompakte Operatoren allgemein). Der Name rührt daher, dass für den Schrödingeroperator (den ich hier nicht genauer beschreiben will) eines gegebenen Atoms das Spektrum genau aus den Welllängen des Emissionsspektrum des Atoms besteht (genauer, den negativen Energien von Photonen mit diesen Wellenlängen). Das Verständnis von Operatorenspektren hat also einen unglaublich direkten Bezug zur Quantenmechanik.

Ich erwähne nun auch noch die fundamentale Aussage über stetige Operatoren, analog zur Existenz von Eigenwerte von Matrizen (zur Erinnerung: Eigenwerte sind in endlich dimensionalen Vektorräumen immer genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms; über algebraisch abgeschlossenen Körper wie  $\mathbb{C}$  gibt es also immer Eigenwerte).

**9.5. Theorem** (Banach) *Das Spektrum eines stetigen  $\mathbb{C}$ -linearen Operators auf einem komplexen Banachraum ist immer eine kompakte Teilmenge von  $\mathbb{C}$ , und nie leer.*

Ich kann es nicht lassen die Existenz von Spektralwerten zu skizzieren: Als Ersatz des Fundamentalsatzes der Algebra zieht man hierfür den Satz von Liouville aus der Funktionentheorie heran: Eine komplex differenzierbare Funktion  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist entweder konstant oder unbeschränkt (für ein Polynom  $P$  ohne Nullstelle ist  $\frac{1}{P}$  eine solche Funktion die beschränkt ist, und damit konstant; der Liouville'sche Satz enthält also den Fundamentalsatz der Algebra).

Hätte nun ein Operator  $A$  auf einem Banachraum  $X$  wie oben leeres Spektrum, so wäre für jedes  $x \in X$  und stetige lineare Abbildung  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{C}$  die Funktion

$$R_{x,\varphi}: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \lambda \longmapsto \varphi((\lambda \cdot \text{id} - A)^{-1}(x))$$

komplex differenzierbar und mit  $|R_{x,\varphi}(\lambda)| \rightarrow 0$  bei  $|\lambda| \rightarrow \infty$  (beides nicht schwer zu prüfen), also muss sie nach dem Satz von Liouville verschwinden. Aber ein weiterer fundamentaler Satz der Funktionalanalysis (nämlich der von Hahn-Banach, der übrigens auch auf dem Zorn'schen Lemma fußt) sagt, dass wenn  $\varphi(x) = 0$  für alle stetigen linearen  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{C}$  gilt, dann muss schon  $x = 0$  sein. Wir lernen also, in oberem Fall, dass  $(\lambda \cdot \text{id} - A)^{-1}(x) = 0$  für alle  $x \in X$  gilt, und damit  $(\lambda \cdot \text{id} - A)^{-1} = 0$  im Widerspruch zur Invertierbarkeit.

**9.6. Beispiel** Für den Multiplikationsoperator  $\mu: L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$  von oben haben wir

$$\text{Spec}(\mu) = [0, 1],$$

obwohl  $\mu$  keine Eigenwerte hat: Offenbar ist  $\lambda \cdot \text{id} - \mu$  immer injektiv, es gilt ja einfach

$$[(\lambda \cdot \text{id} - \mu)(f)](t) = (\lambda - t)f(t)$$

und das wird offensichtlich durch Teilen durch  $t \mapsto \lambda - t$  rückgängig gemacht. Und für  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0, 1]$  liefert dieses Teilen natürlich auch einfach die inverse Abbildung zu  $\lambda \cdot \text{id} - \mu$ , aber für  $\lambda \in [0, 1]$  ist

$$t \longmapsto \frac{f(t)}{\lambda - t}$$

eben nicht mehr unbedingt quadratintegrierbar, wenn  $f$  das wahr (etwa, wenn  $f$  konstant ist).

Was tut man also nun mit dem Spektrum, wenn es nicht aus Eigenwerten besteht? Hierzu eine Umformulierung der Diagonalisierbarkeit (die etwas kommutativer Algebra bedarf und deshalb nur manchmal in den linearen Algebravorlesungen auftaucht). Ich hoffe, Sie erinnern sich noch daran, dass ein Endomorphismus  $A$  eines endlich dimensionalen Vektorraums genau dann diagonalisierbar ist, wenn das Minimalpolynom  $\min_A$  von  $A$  (das normierte Polynom  $P$  kleinsten Grades mit  $P(A) = 0$ ) in einfache Linearfaktoren zerfällt; um die Erinnerung an das Minimalpolynom wachzurütteln erwähne ich noch einmal, dass für beliebiges  $A$  die Nullstellen von  $\min_A$  genau die Eigenwerte von  $A$  sind, der Satz von Cayley-Hamilton besagt, dass das Minimalpolynom das charakteristische teilt (beide haben sogar immer die gleichen Primfaktoren), und dass  $A$  genau dann eine Jordan'sche Normalform besitzt, wenn alle diese Primfaktoren linear sind, was natürlich über einem algebraisch abgeschlossenen Körper wie  $\mathbb{C}$  automatisch der Fall ist.

Nun zur Umformulierung der Diagonalisierbarkeit: Für jede (zentrale!)  $K$ -Algebra  $R$  und jedes Element  $r \in R$  faktorisiert die eindeutige  $K$ -Algebrenabbildung  $K[T] \longrightarrow R$ , die  $T$  auf  $r$  schickt über einen Isomorphismus

$$K[T]/\min_r \longrightarrow K[r],$$

wo die rechte Seite den kleinsten  $K$ -Unteralgebra von  $R$  bezeichnet, die  $r$  enthält. Wenden wir das auf  $R = \text{Hom}_K(V, V)$  an, so erhalten wir also einen Isomorphismus

$$K[T]/\min_A \longrightarrow K[A].$$

Nun betrachte man die eindeutige  $K$ -Algebrenabbildung

$$K[T] \longrightarrow \text{F}(\text{Spec}(A), K), \quad T \longmapsto \text{id},$$

wo  $\text{Spec}(A) \subseteq K$  eben einfach die Menge der Eigenwerte von  $A$  ist. Dass die Eigenwerte von  $A$  alle Nullstellen von  $\min_A$  sind, sagt, dass die Abbildung über  $K[T]/\min_A$  faktorisiert und kombiniert mit der vorigen Beobachtung erhält man insgesamt eine eindeutige  $K$ -Algebrenabbildung

$$\gamma_A: K[A] \longrightarrow \text{F}(\text{Spec}(A), K) \quad \text{mit} \quad A \longmapsto \text{id}.$$

**9.7. Satz** *Ist  $K$  ein Körper,  $V$  ein endlich dimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $A: V \rightarrow V$   $K$ -linear, so ist  $A$  genau dann diagonalisierbar, wenn  $\gamma_A: K[A] \rightarrow \text{F}(\text{Spec}(A), K)$  ein Isomorphismus ist.*

Man beachte, dass für eine Nummerierung  $\text{Spec}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  die Abbildung

$$(\text{ev}_{\lambda_1}, \dots, \text{ev}_{\lambda_n}): \text{F}(\text{Spec}(A), K) \longrightarrow K^n$$

mit punktweiser Addition und Multiplikation auf der rechten Seite ein Isomorphismus ist, der die Identität auf  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$  schickt. Damit reduziert sich die Behauptung des Satzes auf das Diagonalisierbarkeitskriterium mittels Minimalpolynom: Es ist nämlich leicht zu sehen, dass jedes Element des Rings auf der rechten Seite ein Produkt von Linearfaktoren als Minimalpolynom hat, was die eine Implikation liefert, und für die andere benutzt man den chinesischen Restsatz um bei  $\min_A = (T - \lambda_1) \cdots (T - \lambda_n)_X$

$$K[A] \cong K[T]/\min_A \cong K[T]/T - \lambda_1 \times \cdots \times K[T]/T - \lambda_n \cong K \times \cdots \times K$$

zu erhalten.

Damit gerüstet nun zurück zum Fall von normalen Operatoren auf einem Hilbertraum. Es gilt nämlich nun die folgende Variante dieses Satzes:

**9.8. Theorem** (Spektralsatz für Hilberträume) *Ist  $H$  ein komplexer Hilbertraum und  $N: H \rightarrow H$  ein stetige normale  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung, so gibt es genau einen stetigen Isomorphismus*

$$\gamma_N: \mathcal{C}(N) \longrightarrow \text{C}(\text{Spec}(N), \mathbb{C}) \quad \text{mit} \quad N \longmapsto \text{id}$$

von topologischen  $\mathbb{C}$ -Algebren, wo  $\mathcal{C}(N) \subseteq \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V)$ , die kleinste abgeschlossene  $\mathbb{C}$ -Unteralgebra von  $\mathcal{B}(V, V)$  ist, die  $N$  und das adjungierte  $N^*$  enthält.

Hier ist  $\mathcal{B}(V, V) \subseteq \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V)$  die Teilmenge der stetigen  $\mathbb{C}$ -linearen Abbildungen, ausgestattet mit der Topologie, die von der sogenannten Operatornorm

$$\|A\| := \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$

induziert wird (allein schon, dass dies wirklich eine Norm ist bedarf einiger Überlegung; eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung  $A$  ist genau dann stetig, wenn  $\|A\| < \infty$ ), und  $\text{C}(\text{Spec}(N), \mathbb{C})$  geben wir die Topologie der Supremumsnorm;  $\gamma_N$  ist dann nicht nur stetig sondern sogar normerhaltend.

Jetzt kann man sich fragen, was diese Form des Spektralsatzes denn nun nützt (den Nutzen von Diagonalisierung haben Sie ja in der linearen Algebra hoffentlich bis zur Genüge durchgekaut). Dafür will ich nur ein Beispiel: Benötigt man etwa eine Quadratwurzel  $N$  in  $\mathcal{B}(V, V)$  hat, so lernt man, dass jede stetige Funktion  $w: \text{Spec}(N) \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $w(x)^2 = x$  für alle  $x$  eine solche bestimmt: Solche Funktionen entsprechen nach dem Spektralsatz ja genau den Quadratwurzeln von  $N$  in  $\mathcal{C}(N)$ . In  $\mathcal{B}(V, V)$  gibt es in der Regel natürlich noch mehr Wurzeln; man nehme etwa  $V = \mathbb{R}^2$ ,  $N = \text{id}$ , dann ist jede Spiegelung eine Wurzel von  $N$ , aber der Spektralsatz liefert nur  $\pm \text{id}$ , aber für so manchen Zweck reicht es ja eine in der Hand zu haben, und das leistet der Spektralsatz eben.

Der Satz von Tychonov ist aber immer noch nicht in Sicht. Obiger Spektralsatz ist aber in einem allgemeineren Satz enthalten, für den wir noch eine Definition brauchen:

**9.9. Definition** Eine (komplexe)  $C^*$ -Algebra  $D$  ist eine  $\mathbb{C}$ -Algebra zusammen mit einer Norm  $\|-\|: D \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  und einer  $\mathbb{R}$ -Algebrenabbildung  $(-)^*: D \rightarrow D^{\text{op}}$ , derart dass

- (1)  $D$  ist bezüglich der Norm vollständig,
- (2)  $\|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$  (diese beiden Eigenschaften machen  $D$  zu einer Banachalgebra),

- (3)  $(\lambda \cdot x)^* = \bar{\lambda} \cdot x^*$  und  $(x^*)^* = x$ ,  
 (4)  $\|x^*\| = \|x\|$  und  $\|x \cdot x^*\| = \|x\|^2$ .

für alle  $x, y \in D$  und  $\lambda \in \mathbb{C}$  gilt.

Die prominentesten Beispiel sind nun eben  $\mathcal{B}(V, V)$  mit der Operatornorm und dem Adjungierten als Involution, und damit auch  $\mathcal{C}(A)$  für jedes  $A \in \mathcal{B}(V, V)$ , und für jeden topologischen Raum  $X$  auch  $C^b(X, \mathbb{C})$ , die Menge der beschränkten stetigen Funktionen mit der Supremumsnorm und der komplexen Konjugation als Involution. Das letzte Beispiel ist offenbar immer kommutativ und  $\mathcal{C}(A)$  ist kommutativ eben genau, wenn  $A$  normal ist. Und es gilt nun ganz allgemein:

**9.10. Theorem** (Gelfand, Naimark) *Ist  $D$  eine kommutative  $C^*$ -Algebra, so gibt es einen kompakten Hausdorffraum  $X$  zusammen mit einem Isomorphismus*

$$\gamma: D \longrightarrow C(X, \mathbb{C})$$

*und zu einem zweiten kompakten Hausdorffraum  $Y$  mit einem solchen Isomorphismus  $\beta$  gibt es genau eine stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  mit  $f^* \circ \beta = \gamma$  und diese ist ein Homöomorphismus.*

Mit anderen Worten: Kommutative  $C^*$ -Algebren sind im Wesentlichen das gleiche wie kompakte Hausdorffräume. Das lasse man sich einmal auf der Zunge zergehen; auch insbesondere, dass diese Aussage die Diagonalisierbarkeit normaler Matrizen, als den Spezialfall endlicher diskreter Räume enthält.

In den Satz von Gelfand und Naimark geht nun jedenfalls der Satz von Tychonov entscheidend ein. Wie findet man nämlich so einen Raum  $X$ ? Dazu sollte man sich wohl überlegen, wie man einen Raum  $X$  wieder aus Daten von  $C(X, \mathbb{C})$  zurückgewinnt, die unter Isomorphismus von  $C^*$ -Algebren erhalten bleiben. Die einfachste Art ist wohl, dass jeder Punkt  $x \in X$  den  $C^*$ -Homomorphismus (also eine stetige  $\mathbb{C}$ -Algebrenabbildung, die mit den gegebenen Involutions kommutiert)

$$\text{ev}_x: C(X, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f \longmapsto f(x)$$

liefert und wir damit insgesamt eine Abbildung

$$X \longrightarrow \text{Hom}_{C^*}(C(X, \mathbb{C}), \mathbb{C}).$$

vor uns haben. Und es war schon lange vor dem Beweis des Satzes von Gelfand und Naimark bekannt, dass diese Abbildung für jeden kompakten Hausdorffraum eine Bijektion ist, aber das ist überhaupt nicht offensichtlich: Die Injektivität etwa übersetzt sich dahinein, dass es zu je zwei Punkten  $x \neq y \in X$  eine stetige Funktion  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(x) \neq f(y)$  gibt. Solche Funktionen gibt es in jedem T4-Raum nach dem (sogenannten) Uryson'schen Lemma, und das ist wohl der *raison d'être* dieses Trennungsaxioms (dass jeder kompakte Hausdorffraum automatisch T4 ist, müssen Sie in den Übungen verifizieren). Wir sind nun jedenfalls angehalten für eine beliebige  $C^*$ -Algebra  $D$  für  $X$  die Menge  $\text{Hom}_{C^*}(D, \mathbb{C})$  der sogenannten *Charaktere* von  $D$  anzusetzen. Dann haben wir zumindestens einmal eine Abbildung

$$\gamma_D: D \longrightarrow F(\text{Hom}_{C^*}(D, \mathbb{C}), \mathbb{C}), \quad d \longmapsto [\varphi \longmapsto \varphi(d)].$$

Als nächstes gilt es eine Topologie auf  $\text{Hom}_{C^*}(D, \mathbb{C})$  zu finden. Es gilt natürlich  $\text{Hom}_{C^*}(D, \mathbb{C}) \subseteq \mathcal{B}(D, \mathbb{C})$  und wir könnten die hiervon induzierte Unterraumtopologie betrachten. Es stellt aber heraus, dass dies immer die diskrete Topologie ist daher nicht besonders interessant (und natürlich auch meist nicht kompakt!). Es gibt aber noch eine zweite naheliegende Wahl für die Topologie auf  $\text{Hom}_{C^*}(D, \mathbb{C})$ : Die der punktweisen Konvergenz! Und damit nun endlich zur Anwendung des Satzes von Tychonov:

**9.11. Korollar** *Ist  $D$  eine  $C^*$ -Algebra, so ist  $\text{Hom}_{C^*}(D, \mathbb{C})$  mit der Topologie der punktweisen Konvergenz ein kompakter Hausdorffraum.*

PROOF. Geben wir  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$  für zwei normierte komplexe Vektorräume  $V, W$  die Topologie der punktweisen Konvergenz, so können wir feststellen, dass jede  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung auf  $V$  durch ihre Einschränkung auf die Kugel

$$U_V = \{x \in V \mid \|x\| \leq 1\}$$

eindeutig bestimmt. Mit anderen Worten die Einschränkungabbildung

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W) \longrightarrow \mathbb{C}(U_V, W)$$

ist injektiv und es ist nicht schwer zu prüfen, dass sie ein Homöomorphismus auf ihr Bild ist. Setzen wir nun  $V = D$  und  $W = \mathbb{C}$  ein, so lernen wir, dass  $\text{Hom}_{C^*}(D, \mathbb{C})$  die Unterraumtopologie von  $\mathbb{C}(U_D, \mathbb{C})$ . Aber jeder  $C^*$ -Homomorphismus  $\varphi: D \rightarrow \mathbb{C}$  hat nach dem folgenden Lemma Norm 1 und erfüllt daher  $\varphi(U_D) \subseteq D^2 \subseteq \mathbb{C}$ . Es ist also  $\text{Hom}_{C^*}(D, \mathbb{C})$  ein Unterraum von  $\mathbb{C}(U_D, D^2)$ , und zwar ist es ein abgeschlossener Unterraum: Dass die Gleichungen die Additivität, Multiplikativität,  $\mathbb{C}$ -Linearität und Involutivität definieren aus dem Raum aller Abbildungen einen abgeschlossenen ausschneiden ist hoffentlich klar, und wie oben erwähnt ist eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung die die Kugel auf eine beschränkte Menge abbildet automatisch stetig, das muss also nicht mehr gesondert betrachtet werden.

Insgesamt ist also  $\text{Hom}_{C^*}(D, \mathbb{C})$  homöomorph zu einem abgeschlossenen Unterraum von  $\prod_{d \in U_D} D^2$  und ist Hausdorff und nach dem Satz von Tychonov eben kompakt.  $\square$

Holen wir noch den Beweis der Normabschätzung nach, er liefert nämlich auch noch den Schlussakkord unserer Diskussion: Dazu setzen wir für jede  $C^*$ -Algebra  $D$  und ein  $a \in D$  noch

$$\text{Spec}(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda - a \text{ ist nicht invertierbar}\},$$

in direkter Verallgemeinerung der Definition für lineare Abbildungen.

**9.12. Lemma** *Ist  $\varphi: D \rightarrow \mathbb{C}$  ein Charakter einer  $C^*$ -Algebra, so gilt  $\varphi(a) \in \text{Spec}(a)$  für jedes  $a \in D$  und gilt  $|\lambda| \leq \|a\|$  für jedes  $\lambda \in \text{Spec}(a)$ .*

PROOF. Offenbar gilt  $\varphi(a) - a \in \ker(\varphi)$  und da jeder Ringhomomorphismus Einheiten auf Einheiten schickt, kann  $\varphi(a) - a \in D$  keine sein, also  $\varphi(a) \in \text{Spec}(a)$ . Und ist  $\lambda > \|a\|$ , so folgt, dass die geometrische Reihe  $\sum_{k \geq 0} \frac{a^k}{\lambda^k}$  konvergiert und damit gilt

$$(\lambda - a) \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{k \geq 0} \frac{a^k}{\lambda^k} = \left(1 - \frac{a}{\lambda}\right) \cdot \sum_{k \geq 0} \frac{a^k}{\lambda^k} = 1$$

nach der geometrischen Summenformel, sodass  $\lambda - a$  invertierbar ist.  $\square$

Damit erhalten wir nun jedenfalls eine Abbildung

$$\gamma_D: D \longrightarrow \mathbb{C}(\text{Hom}_{C^*}(D, \mathbb{C}), \mathbb{C}).$$

Für den Existenzteil des Satzes von Gelfand und Naimark bleibt noch zu prüfen, dass sie ein Isomorphismus ist. Für die Surjektivität bemüht man meist den Satz von Stone-Weierstraß, der die dichten Unteralgebren von stetigen Funktionen auf kompakten Räumen charakterisiert (sie haben in den Analysisvorlesungen hoffentlich gelernt, dass die Polynome in den stetigen Abbildungen  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dicht liegen; der Satz verallgemeinert das) Und für die Injektivität zeigt man, dass  $\|\gamma_D(a)\| = \|a\|$ . Hierfür wiederum beobachtet, man dass die aus dem Lemma entstehende Abbildung

$$\text{ev}_a: \text{Hom}_{C^*}(D, \mathbb{C}) \longrightarrow \text{Spec}(a)$$

immer surjektiv ist: Ist nämlich  $\lambda \in \text{Spec}(a)$ , so ist  $a - \lambda$  keine Einheit in  $D$  und damit das von  $a - \lambda$  erzeugte Ideal nicht ganz  $D$ . Als eine Konsequenz des Zorn'schen Lemmas findet man daher ein maximales Ideal  $a - \lambda \in m \subseteq D$ . Nun überprüft man, dass  $D/m$  die Struktur einer  $C^*$ -Algebra von  $D$  erbt, aber gleichzeitig ein Körper ist. Wir werden im Laufe dieses Semesters noch beweisen, dass das schon impliziert, dass die kanonische Abbildung  $u: \mathbb{C} \rightarrow D/m$  ein Isomorphismus ist, ein weiterer Satz von Gelfand. Invertiert man  $u$  jedenfalls erhält man einen Charakter

$$D \xrightarrow{\text{pr}} D/m \xrightarrow{u^{-1}} \mathbb{C}$$

der per Konstruktion  $a$  auch  $\lambda$  schickt. Diese Überlegung übersetzt zum einen die Gleichung  $\|\gamma_D(a)\| = \|a\|$  in die Aussage, dass es immer ein  $\lambda \in \text{Spec}(a)$  mit  $|\lambda| = \|a\|$  gibt, welche nun schlussendlich aus der Formel für den Spektralradius in Banachalgebren folgt. Zum anderen liefert sie aber zusammen mit 7.8:

**9.13. Korollar** *Ist  $H$  ein Hilbertraum und  $N: H \rightarrow H$  eine stetige, normale  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung, so ist die Abbildung*

$$\mathrm{Hom}_{C^*}(\mathcal{C}(N), \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(N), \quad \varphi \longmapsto \varphi(N)$$

*ein Homöomorphismus.*

Und auf diese Weise folgt nun insbesondere der Spektralsatz aus dem Satz von Gelfand und Naimark. Man setzt daher auch für eine allgemeine  $C^*$ -Algebra

$$\mathrm{Spec}(D) = \mathrm{Hom}_{C^*}(D, \mathbb{C})$$

mit der Topologie der punktweisen Konvergenz und nennt diesen Raum das *Spektrum* von  $D$ . Und für eine kommutative  $C^*$ -Algebra ist eine weitere Beschreibung (der unterliegenden Menge) dieses Raums durch die Menge der maximalen Ideale in  $D$  gegeben, wie sich sofort aus dem Satz von Gelfand über die  $C^*$ -Körper ergibt. Insbesondere hängt in diesem Fall die unterliegende Menge des Spektrums nur von der unterliegenden Algebra von  $D$ , und weder der Topologie noch der Involution ab.

Ich beende diesen Abschnitt nun mit der Bemerkung, dass Hilbert mit seinem Nullstellensatz auch gezeigt hat, dass für eine Ansammlung von Polynomen  $f_1, \dots, f_k \in K[T_1, \dots, T_n]$ ,  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Körper, die Menge

$$V(f) = \{x \in K^n \mid f_i(x) = 0 \text{ für alle } 1 \leq i \leq k\},$$

die uns im Zuge der Zariski-Topologie begegnet ist, immer in Bijektion zu den maximalen Idealen der Algebra  $\mathcal{O}_f := K[T_1, \dots, T_n]/(f_1, \dots, f_k)$  steht (ein  $x \in V(f)$  entspricht hierbei genau dem Bild des Ideal  $m_x = \{g \in K[T_1, \dots, T_n] \mid g(x) = 0\}$ ), was das Studium von Nullstellenmengen von Polynomgleichungen ebenfalls in die Analyse von Spektren von Ringen übersetzt, und diese damit für die algebraische Geometrie fundamental macht. Um die Annahme der algebraischen Abgeschlossenheit an  $K$  zu entfernen (und auch zu so manch subtilerem Zweck) betrachtet man heute meist systematisch die Menge der Primideale in einem Ring  $R$ , anstatt nur der maximalen, aber jetzt muss ich Sie wohl wirklich in die Vorlesungen zur Funktionalanalysis und algebraischen Geometrie weiterverweisen.

## Mannigfaltigkeiten und Bündel

Ziel dieses Abschnittes ist zu erklären, wie man die Methoden der Differentialrechnung von Teilmengen euklidischer Räume auf allgemeinere Räume, wie die Grassmann'schen überträgt. Die Klasse von Räumen für die das möglich ist, sind die sogenannten differenzierbaren Mannigfaltigkeiten, die wir als erstes einführen werden. Auf diesen lässt sich dann nicht nur ein Begriff von stetigen Funktionen (wie eben in beliebigen topologischen Räumen) sondern auch von differenzierbaren Funktionen einführen. Sich zu überlegen, welche Form die Ableitung einer solchen Funktion genau ist, wird uns dann auf das Tangentialbündel einer Mannigfaltigkeit führen, und damit zum Begriff des allgemein Faserbündels führen. Hier werden ich die grundlegenden Konstruktionen angeben, die in der Differential-topologie und -geometrie immer und immer wieder auftreten, was viele Probleme aufwerfen wird, von denen wir dann im letzten Kapitel der Vorlesung nur einige der einfachsten lösen werden können.

### 1. Topologische Mannigfaltigkeiten

Starten wir direkt mit dem Grundbegriff dieses Kapitels:

**1.1. Definition** Ein topologischer Raum  $M$  heißt eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, falls er hausdorff'sch ist und lokal euklidisch, also wenn es um jeden Punkt  $x \in M$  eine offene Umgebung  $x \in U \subseteq M$  und ein offenes  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  zusammen mit einem Homöomorphismus  $\varphi: U \rightarrow V$  gibt. Ein solches Tripel  $(U, V, \varphi)$  heißt dann eine Karte von  $M$  und eine Ansammlung von Karten, die  $M$  überdecken heißt ein Atlas von  $M$ .

**1.2. Beispiel** (1) Das trivialste Beispiel ist natürlich eine offene Teilmenge  $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ; hier ist  $\{(V, V, \text{id})\}$  ein Atlas. Entlang dieses Beispiels werden sich viele der Überlegungen, die wir im weiteren treffen werden, auf die Ergebnisse der Analysisvorlesungen reduzieren.  
 (2) Das einfachste nicht-triviale Beispiel ist wohl  $S^n$ . Hierzu erinnere ich an die stereographischen Projektionen

$$\text{st}_v: S^n \setminus \{v\} \longrightarrow v^\perp, \quad x \longmapsto \frac{1}{1 - \langle x, v \rangle} x - \frac{\langle x, v \rangle}{1 - \langle x, v \rangle} v$$

aus den Übungen (zur Erinnerung:  $\text{st}_v(x)$  ist der Schnittpunkt der Geraden durch  $v$  und  $x$  mit  $v^\perp$ ) mit Umkehrabbildung

$$\text{sp}_v: v^\perp \longrightarrow S^n \setminus \{v\}, \quad x \longmapsto \frac{2}{1 + |x|^2} x + \frac{|x|^2 - 1}{1 + |x|^2} v,$$

offenbar beide stetig.

Wählt man sich nun irgendwie eine Basis von  $v^\perp$ , und damit einen lineare Homöomorphismus  $b: \mathbb{R}^n \rightarrow V$ , so ist die Komposition

$$b^{-1} \circ \text{st}_v: S^n \setminus \{v\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine Karte von  $S^n$  und jede Ansammlung von mindetens zwei solcher Karten bilden einen Atlas. Anbieten tun sich natürlich die zu  $\pm e_{n+1}$  gehörigen, bei denen man dann wegen  $e_{n+1}^\perp = \mathbb{R}^n \times \{0\} = (-e_{n+1})^\perp$  die Standardbasis von  $\mathbb{R}^n$  nehmen kann. Ausgeschrieben lauten die zugehörigen Karten dann einfach

$$S^n \setminus \{e_{n+1}\} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \longmapsto \left( \frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}} \right)$$

und

$$S^n \setminus \{-e_{n+1}\} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \longmapsto \left( \frac{x_1}{1+x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1+x_{n+1}} \right).$$

- (3) Der Vollständigkeit halber hier schnell das Beispiel eines lokal euklidischen Raumes der nicht hausdorff'sch ist: Man nehme  $X = (\mathbb{R} \times \{0, 1\})/\sim$  wo  $(x, t) \sim (y, s)$  falls  $x = y$  und zusätzlich  $t = s$  oder  $x \neq 0$ . Mit anderen Worten, jedes  $(x, 0)$  wird  $(x, 1)$  identifiziert, außer dass  $(0, 0)$  und  $(0, 1)$  distinkt bleiben. Das Ergebnis heißt meist die Grade mit zwei Ursprüngen (eben den Punkten  $(0, 0)$  und  $(0, 1)$ ) und jede zwei offene Umgebungen dieser Punkte scheiden sich offenbar, sodass wir es mit einem nicht hausdorff'schen T1-Raum zu tun haben. Trotzdem bilden die beiden Abbildungen

$$\mathbb{R} \longrightarrow X, \quad r \longmapsto (x, 0) \quad \text{und} \quad \mathbb{R} \longrightarrow X, \quad r \longmapsto (x, 1)$$

einen Atlas von  $X$ . Solche furchterbare Beispiele schließt die Hausdorffeigenschaft eben aus.

Bevor wir weitere Beispiele besprechen, möchte ich noch auf ein fundamentales Problem aufmerksam machen, das man in obiger Definition schnell übersieht: Wir würden die Zahl  $n$  aus der Definition einer  $n$ -Mannigfaltigkeit  $X$  gern die Dimension von  $X$  nennen. Es ist nun aber der Definition nach erst einmal nicht klar, ob die Zahl  $n$  durch  $M$  überhaupt eindeutig bestimmt ist. Selbst die Antwort auf die hierfür wohl grundlegendste Frage, nämlich ob  $\mathbb{R}^n$  jemals homöomorph zu  $\mathbb{R}^m$  sein kann, ohne dass  $n = m$  gilt, ist überhaupt nicht offensichtlich. Um ihr Gefühl dafür etwas zu schärfen bemerke man:

- (1) Es gibt nach den Sätzen der Cantor'schen Mengenlehre (genauer brauchen wir hier den Satz von Hessenberg) Bijektionen  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  für jede  $n, m \geq 1$  (allein das ist ja schon wahrscheinlich schon überraschend).
- (2) Auf der anderen Seite gibt es natürlich keine  $\mathbb{R}$ -Vektorraumisomorphismen  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  für  $n \neq m$ , eins der zentralen Ergebnisse der linearen Algebra.
- (3) Einen Diffeomorphismus, also eine differenzierbare Bijektion  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit differenzierbarer Inversen kann es folglich auch nur bei  $n = m$  geben: Ist dann ja schließlich nach der Kettenregel die Ableitung  $D_x f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ein  $\mathbb{R}$ -linearer Isomorphismus (mit Inversem  $D_{f(x)} f^{-1}$ ).
- (4) Einen Isomorphismus als abelsche Gruppen, ja sogar als  $\mathbb{Q}$ -Vektorräume gibt es hingegen nach dem allgemeinen Existenzsatz für Basen von Vektorräumen, siehe ??, schon: Jede  $\mathbb{Q}$ -Basis von  $\mathbb{R}^n$  hat die nämlich gleiche Mächtigkeit wie  $\mathbb{R}^n$  und folglich gibt es (wieder nach dem Satz von Hessenberg) eine Bijektion zwischen solchen Basen für beliebige  $n$  und  $m$ , und das liefert insbesondere einen Isomorphismus als  $\mathbb{Q}$ -Vektorräume.
- (5) Ein solcher kann aber für  $n \neq m$  nie stetig sein, denn eine stetige  $\mathbb{Q}$ -lineare Abbildung  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist natürlich automatisch auch  $\mathbb{R}$ -linear.

Wo nun genau in dieses Gemenge sich die Homöomorphismen einordnen, ist erst einmal völlig unklar, und wir werden die Lage dieses Semester auch nicht vollständig klären. Einzig der Fall  $n = 1$  lässt sich mit unserem jetzigen Wissen leicht erledigen, er wird eine Übung sein. Mit den Methoden aus dem letzten Kapitel der Vorlesung, werden wir den Fall  $n = 2$  erledigen können. Einen Gedanken will ich Ihnen aber direkt noch austreiben: Es liegt die Annahme nahe, dass es nicht nur keine Homöomorphismen  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  für  $n \neq m$  gibt, sondern für  $m > n$  nicht mal stetige Surjektionen (was natürlich alles gewünschte implizieren würde). Die gibt es aber überraschenderweise, wie Peano 1890 beobachtete!

**1.3. Beispiel** Wir konstruieren eine stetige Surjektion  $g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ , so etwas nennt man heutzutage eine Peanokurve. Wie man hieraus (leicht!) stetige Surjektionen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  für jeden  $n > 1$  konstruiert überlasse ich einmal ihnen. Die folgende Konstruktion ist von Hilbert (aus dem Jahr 1889) und etwas einfacher als Peano's ursprüngliche Version.

Wir konstruieren sie als Grenzwert einer Folge von stetigen Funktionen  $f_i: [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ , die wir induktiv definieren. Die Idee ist, dass wir ein Quadrat iterativ immer vier die offensichtlichen vier Teilquadrate (also oben-links, unten-links, unten-rechts, oben-rechts) zerlegen können, also  $[-1, 1]^2$  im  $n$ -ten Schritt in  $4^n$  gleichgroße Quadrate und eine Funktionenfolge wählen, sodass

- (1)  $f_n$  die Mittelpunkt der  $2^n$  Quadrate durchläuft, und
- (2)  $f_{n+1}(t)$  immer im gleichen der  $2^n$  Quadrate liegt wie  $f_n(t)$

So eine Folge konstruiert man wie folgt: Als  $f_0$  wähle einfach  $t \mapsto (t, 0)$ . Dann seien

$$H_0, \dots, H_3: [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1]^2$$

durch

$$\begin{aligned} H_0(s, t) &= \left(\frac{t}{2}, \frac{s}{2}\right), & H_1(s, t) &= \left(\frac{s}{2}, \frac{t+1}{2}\right) \\ H_2(s, t) &= \left(\frac{s+1}{2}, \frac{t+1}{2}\right), & H_3(s, t) &= \left(\frac{2-t}{2}, \frac{1-s}{2}\right) \end{aligned}$$

gegeben. Es bildet also  $H_i$  ganz  $[0, 1]^2$  in das  $i$ -te der vier Teilquadrate von  $[0, 1]^2$  und rotiert es in den Fällen  $i = 0$  und  $i = 3$  um  $\pm\pi/2$  (was sich gleich als günstig erweisen wird).

Haben wir nämlich nun  $f_n: [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$  gegeben, so setzen wir

$$f_{n+1}(t) = \begin{cases} H_0(f_n(4t)) & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ H_1(f_n(4t-1)) & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H_2(f_n(4t-2)) & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ H_3(f_n(4t-3)) & \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

was eben bei  $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$  und  $\frac{3}{4}$  genau nach Wahl der Rotationen zusammenpasst: Man erhält nämlich induktiv  $f_n(0) = (0, 0)$  und  $f_n(1) = (1, 0)$ , wegen

$$f_{n+1}(0) = H_0(f_n(0)) = H_0(0, 0) = (0, 0) \quad \text{und} \quad f_{n+1}(1) = H_3(f_n(1)) = H_3(1, 0) = (1, 0)$$

und deshalb gelten

$$H_0(f_n(1)) = H_0(1, 0) = \left(\frac{1}{2}, 0\right) = H_1(0, 0) = H_1(f_n(0))$$

was die Wohldefiniert von  $f_{n+1}$  bei  $t = \frac{1}{4}$  verifiziert, und analog gelten

$$H_1(f_n(1)) = H_1(1, 0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = H_2(0, 0) = H_2(f_n(0))$$

und

$$H_2(f_n(1)) = H_2(1, 0) = \left(1, \frac{1}{2}\right) = H_3(0, 0) = H_3(f_n(0))$$

Es ist also  $f_n$  nach 3.25 stetig. Den Nachweis, dass die  $f_n$  gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion konvergieren, und diese wirklich surjektiv ist, werden Sie in den Übungen führen müssen.

Nun also zurück zu interessanteren Beispielen von Mannigfaltigkeiten. Dazu erinnere ich erst einmal an einen der Hauptsätze der zweiten Analysisvorlesung:

**1.4. Theorem** (Satz über implizite Funktionen) *Es seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$   $l$ -fach stetig differenzierbar,  $y \in \mathbb{R}^k$  und  $x \in U$  mit  $f(x) = y$ . Ist dann  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  ein  $\mathbb{R}$ -Untervektorraum derart, dass die  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $D_x f|_P: P \rightarrow \mathbb{R}^k$  invertierbar ist, so gibt es für jeden Komplementärraum  $Q \subseteq \mathbb{R}^n$  von  $P$  (also  $P \oplus Q = \mathbb{R}^n$ ) offene  $W \subseteq P$  und  $V \subseteq Q$  und eine Abbildung  $g: V \rightarrow W$ , sodass*

- (1)  $x \in V + W \subseteq U$  und
- (2) für  $v \in V$  und  $w \in W$  gilt  $f(v + w) = y$  genau dann, wenn  $g(v) = w$ .

*In diesem Falle ist  $g$  durch  $f$  und  $V$  (und streng genommen  $W$ ) eindeutig bestimmt und ebenfalls  $l$ -fach stetig differenzierbar.*

Etwas anders gesagt gilt, wenn wir  $U \subseteq P \oplus Q$  benutzen um  $f$  als Funktion in zwei Variablen aufzufassen, dass  $f(w, g(w)) = y$  für alle  $w \in W$  gilt, und  $v = g(w)$  für gegebenes  $w$  und  $y$  auch die einzige Lösung von  $f(w, v) = y$  ist: Die Lösungsmenge der Gleichung  $f(w, v) = y$  kann für gegebenes  $y \in \mathbb{R}^k$  also durch eine implizit gegebene Funktion  $g$  parametrisiert werden (für die es in der Regel keinerlei vernünftige Formel mehr gibt!). Oder noch anders gesagt: Die Menge  $f^{-1}(y)$  hat in  $U$  die Gestalt des Graphen von  $g$ . Es ist nämlich

$$V \longrightarrow f^{-1}(y) \cap (V + W), \quad v \longmapsto v + g(v)$$

ein  $l$ -fach differenzierbar mit Umkehrabbildung gegeben durch die  $\mathbb{R}$ -lineare  $\mathbb{R}^n \rightarrow Q$ , die auf  $Q$  die Identität ist und Null auf  $P$ . Insbesondere ist  $\text{id} + g$  ein Homöomorphismus.

Das liefert uns nämlich sofort:

**1.5. Korollar** *Ist  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$  stetig differenzierbar und  $y \in \mathbb{R}^k$  ein regulärer Wert von  $f$ , also die Ableitung  $D_x f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  surjektiv für jedes  $x \in U$  mit  $f(x) = y$ , so ist  $f^{-1}(y)$  eine  $(n - k)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.*

Ist nämlich  $x \in f^{-1}(y)$  so können wir uns wegen der Surjektivitätsannahme (und dem Basisauswahlsatz der linearen Algebra) ein  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  derart schnappen, dass die Einschränkung  $D_x f: P \rightarrow \mathbb{R}^n$  invertierbar ist. Wählen wir uns dann noch einen Komplementärraum  $Q$  und eine Basis  $b$  von  $Q$  (also einen linearen Isomorphismus  $b: \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow Q$ ) so erhalten wir mittels Satz über implizite Funktionen (mit den Bezeichnungen von oben) einen Homöomorphismus

$$b^{-1}(V) \xrightarrow{b} V \xrightarrow{\text{id}+g} f^{-1}(y) \cap (V + W)$$

und das ist offenbar (das Inverse) eine(r) Karte von  $f^{-1}(y)$  um  $x$  herum. Die Karte selber einfach die Einschränkung der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{pr} Q \xrightarrow{b^{-1}} \mathbb{R}^{n-k}$$

wo die erste Abbildung die von der Zerlegung  $\mathbb{R}^n = P \oplus Q$  induzierte Projektion ist.

**1.6. Beispiel** (1) Als ein ganz simples Beispiel liefert das noch einmal, dass  $S^n$  eine Mannigfaltigkeit ist: Betrachte dafür

$$f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x|^2 = x_0^2 + \cdots + x_n^2.$$

Das ist offenbar eine glatte Abbildung und es gilt

$$D_x f(v) = 2x_0 v_0 + \cdots + 2x_n v_n = 2\langle x, v \rangle$$

Insbesondere ist die  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $2\langle x, - \rangle = D_x f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  für jedes  $x \neq 0$  surjektiv, und damit jedes  $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  ein regulärer Wert von  $f$ . Insbesondere ist  $S^n = f^{-1}(1)$  also eine Mannigfaltigkeit.

Schaut man sich nun obige Konstruktion einmal genauer an, so stellt man fest, dass für  $x \in S^n$  die Einschränkung von  $D_x f$  auf  $\mathbb{R} \cdot x$  surjektiv ist. Wir können also  $P = \mathbb{R}^x$  und  $Q = x^\perp$  im Satz über implizite Funktionen wählen. Und in der Tat ist für

$$V = \{v \in x^\perp \mid 1 > |v|\} \quad \text{und} \quad W = \mathbb{R}_{>0} \cdot x$$

die Abbildung

$$g: V \rightarrow W, \quad v \mapsto \sqrt{1 - |v|^2} \cdot x$$

eine Lösung des impliziten Funktionenproblems, und

$$\text{id} + g: V \rightarrow S^n \cap (V + W), \quad v \mapsto v + \sqrt{1 - |v|^2} \cdot x$$

eine Homöomorphismus auf die (offene) Hemisphäre um  $x$ .

(2) Hier ein substantielleres Beispiel indem eine explizite Angabe der Karten gar nicht mehr so leicht ist: Es sei  $\text{Mat}^s(n \times n, \mathbb{R}) \subseteq \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$  die Menge der symmetrischen Matrizen, ein  $\mathbb{R}$ -Untervektorraum der Dimension  $\frac{n(n+1)}{2}$ .

Betrachte dann die Abbildung

$$\text{Sym}: \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}^s(n \times n, \mathbb{R}), \quad A \mapsto A \cdot A^t;$$

und nur zur Sicherheit: Es gilt  $(A \cdot A^t)^t = (A^t)^t \cdot A^t = A \cdot A^t$ , sodass  $A \cdot A^t$  wirklich immer symmetrisch ist. Die Abbildung  $S$  ist bei weitem nicht surjektiv: Sie haben hoffentlich irgendwann in im Laufe der linearen Algebra gelernt, dass das Bild genau aus den positiv definiten symmetrischen Matrizen besteht, und das Urbild einer positiv definiten symmetrischen Matrix  $S$  wiederum genau aus den Matrizen, deren Spalten eine Orthonormalbasis des  $\mathbb{R}^n$  bezüglich des Skalarprodukts  $(x, y) \mapsto x^t \cdot S \cdot y$ . Jedenfalls gilt aus diesem (oder auch nach direktem Hinsehen)

$$\text{O}(n) = \text{Sym}^{-1}(\mathbb{1}_n)$$

und ich behaupte, dass  $\mathbb{1}_n$  ein regulärer Wert von  $\text{Sym}$  ist. Es folgt also, dass  $O(n)$  eine Mannigfaltigkeit der Dimension

$$n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

ist. Etwa hat die für das wirklich wahre Leben so bedeutsame Gruppe  $O(3)$  Dimension 3.

Zur Behauptung: Wir berechnen  $D_A \text{Sym}: \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}^s(n \times n, \mathbb{R})$  für ein beliebiges  $A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ . Dazu beobachten wir, dass  $\text{Sym}$  (streng genommen, die Komposition mit der Inklusion von symmetrischen in beliebige Matrizen) sich als Komposition

$$\text{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \xrightarrow{A \mapsto (A, A^t)} \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \times \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \xrightarrow{\text{Sym}} \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$$

zerlegen lässt. Gemäß Kettenregel ist  $D_A \text{Sym}$  also das Produkt der Ableitungen dieser beiden Abbildungen. Aber hier ist die erste linear und die zweite bilinear und ich hoffe Sie erinnern sich, dass für eine lineare Abbildung  $\varphi: V \rightarrow W$  und bilineare  $\psi: V \times V' \rightarrow W$  immer

$$(D_v \varphi)(x) = \varphi(x) \quad \text{und} \quad (D_{(v, v')} \psi)(x, x') = \psi(x, v') + \psi(v, x')$$

gelten. Einsetzen liefert dann in unserem konkreten Fall

$$(D_A \text{Sym})(B) = A \cdot B^t + B \cdot A^t.$$

Für welche  $A$  das nun genau surjektiv ist, will ich hier gar nicht untersuchen, aber für  $A \in \text{Sym}^{-1}(\mathbb{1}_n)$  und  $S \in \text{Mat}^s(n \times n, \mathbb{R})$  gilt sicherlich

$$D_A \left( \frac{1}{2} SA \right) = \frac{1}{2} (AA^t S^t + SAA^t) = \frac{1}{2} (S + S) = S,$$

sodass  $\mathbb{1}_n$  in der Tat ein regulärer Wert ist.

- (3) Das obige Argument funktioniert beinahe wortwörtlich (man ersetze die transponierte durch die adjungierte Matrix und die symmetrischen durch die selbstadjungierten) um zu zeigen, dass die Matrizen, die bezüglich irgendeiner perfekten symmetrischen Bilinearform  $\psi$  auf  $\mathbb{R}^n$  isometrisch sind (also die  $\psi(Ax, Ay) = \psi(x, y)$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$  erfüllen), ebenfalls eine Mannigfaltigkeit (gleicher Dimension wie  $O(n)$ ) bilden. Typisch ist natürlich der Fall der Form die durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

mit  $p$  positiven und  $q$  negativen Einträgen eine Mannigfaltigkeit, die mit  $O(p, q)$  bezeichnet wird (im Gegensatz zu  $O(n)$  ist sie aber nicht kompakt. Und nach dem Sylvester'schen Trägheitssatz sind das bis auf Konjugation auch alle Beispiele von perfekten symmetrischen Bilinearformen. In der Physik spielt etwa die 6-dimensionale Gruppe  $O(3, 1)$  als die Gruppe der Lorentztransformationen in der Relativitätstheorie eine große Rolle.

- (4) Analoges gilt im komplexen Fall: Das Argument lässt es sich auch auf komplex linear (perfekte) Bilinearformen anwenden (von denen es bis auf Konjugation ja nur eine gibt). Es folgt dass die komplexe orthogonale Gruppe

$$O(n, \mathbb{C}) = \{A \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) \mid A \cdot A^t = \mathbb{1}_n\}$$

eine Mannigfaltigkeit der (reellen!) Dimension  $n(n-1)$ . Es lässt sich aber auch auf sesquilineare hermitesche Bilinearformen anwenden. Der Raum der hermiteschen Matrizen hat (reelle!) Dimension  $n^2$  (im Gegensatz zum Raum der komplexen symmetrischen

Matrizen, der reelle Dimension  $n(n+1)$  hat. Es ist also insbesondere die unitäre Gruppe

$$U(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{C}) \mid A \cdot \bar{A}^t = \mathbb{1}_n\}$$

eine Mannigfaltigkeit der Dimension  $n^2$ , und ähnlich gilt für die Varianten  $U(p, q)$ , definiert wir im reellen Fall (aber diese sind im Unterschied zu  $U(n)$  wieder nicht kompakt).

Dies sind alles Beispiele, die sie natürlich schon in den Analysisvorlesungen behandeln hätten können. Hier nun das neue, das die eingeführte Begrifflichkeiten rechtfertigt:

**1.7. Beispiel** (1) In den Übungen hatten Sie zu zeigen, dass die Abbildung

$$e_i: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}P^n, \quad x \longmapsto [x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_n]$$

ein Homöomorphismus auf sein Bild

$$U_i = \{L \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \mid L \cap (\mathbb{R}^{i-1} \times \{0\} \times \mathbb{R}^{n-i+1}) = \{0\}\}$$

ist, welches natürlich offen ist: Sein Urbild in  $S^n$  ist schließlich das offene  $\{x \in S^n \mid x_i \neq 0\}$  und  $\mathbb{R}P^n$  trägt gemäß 7.14 die Quotiententopologie von  $S^n$ . Die Umkehrabbildung ist von

$$\{x \in S^n \mid x_i \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \longmapsto \left( \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right)$$

induziert. Da  $\mathbb{R}P^n = U_1 \cup \dots \cup U_{n+1}$  gilt, folgt dass  $\mathbb{R}P^n$  eine  $n$ -Mannigfaltigkeit ist.

Ganz analog folgt, dass  $\mathbb{C}P^n$  eine  $2n$ -Mannigfaltigkeit ist.

## 2. Glatte Strukturen

Der erklärte Sinn von Mannigfaltigkeit soll ja sein, den Differential- und Integralkalkül von Teilmengen euklidischer Räume auf Räume wie die Grassmann'schen zu erweitern. Dafür benötigen wir sicherlich einen sinnvollen Begriff von Differenzierbarkeit für eine Abbildung  $f: M \rightarrow N$  zwischen Mannigfaltigkeiten. Die Grundidee hierfür ist folgende: Für einen Punkt  $x \in M$  gibt es per Definition offene  $x \in U \subseteq M$  und  $f(x) \in U' \subseteq N$  zusammen mit Homöomorphismen

$$\varphi: U \longrightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad \varphi': U' \longrightarrow V' \subseteq \mathbb{R}^k$$

für  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $V' \subseteq \mathbb{R}^k$  offen. Es liegt dann nahe, die Komposition

$$\varphi(U \cap f^{-1}(U')) \xrightarrow{\varphi^{-1}} U \cap f^{-1}(U') \xrightarrow{f} U' \xrightarrow{\varphi'} V' \subseteq \mathbb{R}^k$$

zu betrachten. Die Quelle ist hier eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ , die  $\varphi(x)$  enthält, und wenn  $f$  bei  $x$  zumindest stetig ist, ist sie eine Umgebung von  $x$ . Wir können also versuchen  $f$  als bei  $x$  differenzierbar zu definieren, wenn  $f$  dort stetig ist und obige Komposition differenzierbar bei  $\varphi(x)$ . Aber das ist noch kein ganz sinnvoller Begriff, wie folgendes Beispiel illustrieren soll:

**2.1. Beispiel** Betrachte die Abbildung  $w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt[3]{x}$ . Sie ist bei 0 nicht differenzierbar.

Aber da sie ein Homöomorphismus (mit Umkehrabbildung  $x \mapsto x^3$ ) ist, können wir in obiger Definition  $U = \mathbb{R} = V$  und  $\varphi = \text{id}$  und  $U' = \mathbb{R} = V'$  und  $\varphi' = \text{id}$  nehmen, und haben die Differenzierbarkeit der Komposition

$$\mathbb{R} \xrightarrow{w^{-1}} \mathbb{R} \xrightarrow{w} \mathbb{R} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{R}$$

zu prüfen, welche offenbar auch bei 0 vorhanden ist.

Obiger Begriff gibt also die Differenzierbarkeit nicht korrekt wieder.

Die Lösung ist es, die in der Definition von Differenzierbarkeit erlaubten Karten einzuschränken:

**2.2. Definition** Es sei  $M$  eine  $n$ -Mannigfaltigkeit und  $1 \leq l \leq \infty$ . Dann heißen zwei Karten  $(U, V, \varphi)$  und  $(U', V', \varphi')$ , also  $U, U' \subseteq M$ ,  $V, V' \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, und  $\varphi: U \rightarrow V$ ,  $\varphi': U' \rightarrow V'$  Homöomorphismen,  $C^l$ -kompatibel, falls die *Kartenwechselabbildung*

$$V \cap \varphi(U') = \varphi(U \cap U') \xrightarrow{\varphi^{-1}} U \cap U' \xrightarrow{\varphi'} \varphi'(U \cap U') = \varphi'(U) \cap V'$$

$l$ -fach stetig differenzierbar mit  $l$ -fach stetig differenzierbarer Inverser ist.

Ein Atlas in dem je zwei Karten  $C^l$ -kompatibel sind, heißt ein  $C^l$ -Atlas, und zwei  $C^l$ -Atlanten heißen  $C^l$ -kompatibel, wenn alle ihre Karten das sind (also wenn ihre Vereinigung wieder ein  $C^l$ -Atlas ist).

Ich überlasse es einmal Ihnen als Übung sich zu überlegen, dass  $C^l$ -Kompatibilität von  $C^l$ -Atlanten eine Äquivalenzrelation ist. Für  $l = \infty$  (und das ist der einzige Fall der bei uns ernsthaft vorkommen wird) spricht man auch von *glatt kompatiblen* Karten und *glatten Atlanten*.

Die zentrale Definition dieses Kapitel ist nun:

**2.3. Definition** Eine  $C^l$ -Struktur auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  ist eine  $C^l$ -Kompatibilitätsklasse von  $C^l$ -Atlanten auf  $M$ , und man nennt  $M$  eine  $C^l$ -Mannigfaltigkeit ist ein Paar bestehend aus einer Mannigfaltigkeit  $M$  und einer  $C^l$ -Struktur auf  $M$ .

Ist  $f: M \rightarrow N$  eine Abbildung zwischen zwei  $C^l$ -Mannigfaltigkeiten, so heißt  $f$   *$l$ -fach stetig differenzierbar*, wenn die Komposition

$$\varphi(U \cap f^{-1}(U')) \xrightarrow{\varphi^{-1}} U \cap f^{-1}(U') \xrightarrow{f} U' \xrightarrow{\varphi'} V' \subseteq \mathbb{R}^k$$

das für alle Karten  $(U, V, \varphi)$  in irgend einem  $C^l$ -Atlas von  $M$  und  $(U', V', \varphi')$  in einem von  $N$  ist.

Natürlich kann man auch die Differenzierbarkeit an einzelnen Punkt definieren, und es gibt viele offensichtlich Varianten obiger Definition (etwa kann man differenzierbare, aber nicht notwendigerweise stetig differenzierbare, Kartenwechsel erlauben, etc).

**2.4. Lemma** Sind  $M$  und  $N$   $C^l$ -Mannigfaltigkeiten und  $f: M \rightarrow N$   $l$ -fach stetig differenzierbar, so ist

$$\varphi(U \cap f^{-1}(U')) \xrightarrow{\varphi^{-1}} U \cap f^{-1}(U') \xrightarrow{f} U' \xrightarrow{\varphi'} V' \subseteq \mathbb{R}^k$$

für zwei Karten  $(U, V, \varphi)$  von  $M$  und  $(U', V', \varphi')$  von  $N$  aus beliebigen  $C^l$ -Atlanten in den gegebenen  $C^l$ -Strukturen  $l$ -fach stetig differenzierbar.

Mit anderen Worten, sind obige Kompositionen glatt für jeweils einen Atlas in den gegebenen  $C^l$ -Strukturen, so sind sie für alle mit diesen  $C^l$ -kompatiblen Karten ebenfalls glatt. Kurzum: Die Glattheit der Komposition ist unabhängig von der Kartenwahl in einem gegebenen  $C^l$ -Atlas.

PROOF. Wollen wir das etwa bei  $x \in M$  testen so wählen wir  $C^l$ -Karten  $(W, Z, \psi)$  von  $M$  um  $x$  und  $(W', Z', \psi')$  von  $N$  um  $f(x)$  mit  $f(W) \subseteq W'$  für die  $f$  die Definition der stetigen Differenzierbarkeit erfüllt; die Inklusion  $f(W) \subseteq W'$  erreicht man einfach indem man für irgendeine  $C^l$ -Karte  $(\tilde{W}, \tilde{Z}, \tilde{\psi})$  um  $x$

$$W = \tilde{W} \cap f^{-1}(W') \quad \text{und} \quad V = \tilde{\psi}(\tilde{W} \cap f^{-1}(W'))$$

setzt. Dann ist die Einschränkung

$$\varphi(W \cap U \cap f^{-1}(U')) \xrightarrow{\varphi^{-1}} W \cap U \cap f^{-1}(U') \xrightarrow{f} W' \cap U' \xrightarrow{\varphi'} V' \subseteq \mathbb{R}^k$$

gleich der Komposition

$$\begin{aligned} \varphi(W \cap U \cap f^{-1}(U')) &\xrightarrow{\varphi^{-1}} W \cap U \cap f^{-1}(U') \xrightarrow{\psi} \psi(W \cap U \cap f^{-1}(U')) \\ &\xrightarrow{\psi^{-1}} W \cap U \cap f^{-1}(U') \xrightarrow{f} W' \cap U' \xrightarrow{\psi'} Z' \cap \psi(U') \\ &\xrightarrow{(\psi')^{-1}} W' \cap U' \xrightarrow{\varphi'} V' \subseteq \mathbb{R}^k \end{aligned}$$

und hier ist per Annahme jede Zeile eine  $l$ -fach stetig differenzierbare Abbildung.  $\square$

**2.5. Beispiel** (1) Die Karten aus dem Satz über implizite Funktionen (wie im Anschluss von 1.5 erklärt), sind für eine  $C^l$ -Funktion  $h: U \rightarrow \mathbb{R}^k$  immer  $C^l$ -kompatibel: Für  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $h: U \rightarrow \mathbb{R}^k$   $l$ -fach stetig differenzierbar sind sie schließlich Einschränkungen einer linearen Projektion auf Mengen der Form  $\text{pr}_P: h^{-1}(y) \cap (V + W) \rightarrow V$  für  $V \subseteq P$  und  $W \subseteq Q$  offen für eine direkte Summenzerlegung  $P \oplus Q = \mathbb{R}^n$ ; ihr Inverses ist die

Abbildung  $v \mapsto v + g(v)$  mit einer  $C^l$ -Abbildung  $g$ . Es sind die Kartenwechselabbildungen also die Komposition einer  $l$ -fach stetig differenzierbaren mit einer linearen Abbildung und damit sicherlich wieder  $l$ -fach stetig differenzierbar. Kurzum:

Ist  $y$  ein regulärer Wert von  $h$ , so bilden die Karten aus dem Satz über implizite Funktionen auf  $h^{-1}(y)$  einen  $C^l$ -Atlas.

- (2) Bezüglich dieser  $C^l$ -Struktur ist die Inklusionsabbildung  $h^{-1}(y) \rightarrow \mathbb{R}^n$   $l$ -fach stetig differenzierbar, das übersetzt sich genau zur Differenzierbarkeit (des Inversen) der Karten. Und eine Abbildung  $f: M \rightarrow h^{-1}(y)$  von einer  $C^l$ -Mannigfaltigkeit ist genau dann  $l$ -fach stetig differenzierbar, wenn die Komposition  $M \rightarrow h^{-1}(y) \rightarrow \mathbb{R}^n$  das ist: Die eine Richtung folgt aus der Vorüberlegung und ist die Komposition  $l$ -fach stetig differenzierbar, so ist für offenes  $U \subseteq M$  mit  $f(U) \subseteq h^{-1}(y) \cap (V + W)$  die Einschränkung von  $f$  auf  $U$  offenbar auch durch die Komposition

$$U \xrightarrow{f} h^{-1}(y) \cap (V + W) \subseteq V + W \xrightarrow{\text{pr}_P} V \xrightarrow{\text{id}+g} h^{-1}(y) \cap (V + W)$$

gegeben und per Annahme ist die Komposition der ersten Abbildung  $f: U \rightarrow V + W$   $l$ -fach stetig differenzierbar, sodass obige Komposition das ebenfalls ist.

- (3) Die Aussagen aus diesen beiden Punkten gelten allgemeiner für Untermannigfaltigkeiten und deren Karten, die wir in den Übungen besprechen werden.
- (4) Wenden wir die Konstruktion aus dem ersten Punkt etwa auf 1.6 an, so folgt zu Beispiel, dass  $O(n)$  auf kanonische Weise eine glatte Mannigfaltigkeit ist und die Inversion (die mit der Transposition übereinstimmt) ist eine glatte Abbildung, weil die Transposition offenbar als Abbildung  $\text{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$  glatt (ja sogar linear!) ist.
- (5) In den Übungen müssen Sie sich überlegen, dass ein ganz ähnliches Argument auch zeigt, dass die stereographischen Projektionen glatt kompatibel mit den Karten auf  $S^n$  aus dem Satz über implizite Funktionen sind.
- (6) Die Karten  $\text{id}_{\mathbb{R}}$  und  $\sqrt[3]{\cdot}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sind nicht  $C^1$ -kompatibel, was genau das Problem in 2.1 auslöst.
- (7) Die Karten, die wir dem reellen projektiven Raum in 1.7 angedeihen haben lassen, bilden einen glatten Atlas: Der Kartenwechsel von  $e_i$  und  $e_j$  lautet

$$e_j^{-1}(U_i) \xrightarrow{e_j} U_i \cap U_j \xrightarrow{e_i^{-1}} e_i^{-1}(U_j),$$

wobei  $e_j^{-1}(U_i) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \neq 0\}$  ist. Die Komposition berechnet sich zu

$$x \mapsto \begin{cases} \left( \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{j-1}}{x_i}, \frac{1}{x_i}, \frac{x_j}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right) & i < j \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) & i = j \\ \left( \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{j-1}}{x_i}, \frac{1}{x_i}, \frac{x_j}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right) & i > j \end{cases}$$

offenbar glatt.

- (8) In den Übungen werden Sie einen glatten Atlas auf den Grassmann'schen produzieren müssen.

Es stellt sich nun natürlich naheliegend die Frage, ob eine gegebene Mannigfaltigkeit echt verschiedene glatte Strukturen tragen kann. Verschiedene glatte Strukturen trägt wie wir gerade gesehen haben schon der topologische Raum  $\mathbb{R}$ , aber diese haben eine in gewisser Weise triviale Ursache: Hat man einmal eine glatte Struktur auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  gefunden, so kann man jeden Homöomorphismus  $f: M \rightarrow N$  benutzen um auch auf  $N$  eine einzuführen (man komponiere einfach die Karten von  $M$  mit  $f!$ ). Es wird dann  $f$  ein Diffeomorphismus von  $M$  zu  $N$ . Ist nun  $M = N$  so folgt leicht, dass diese neue glatte Struktur mit der gegebenen genau dann übereinstimmt, wenn  $f$  selbst glatt ist. Ein beliebiger nicht glatter Homöomorphismus (wie eben  $\sqrt[3]{\cdot}$  auf  $M = \mathbb{R}$ ) liefert also eine zweite glatte Struktur auf  $M$ , aber diese ist offenbar in gewissem Sinne nicht echt verschieden von der gegebenen: Es ist ja schließlich  $f$  ein Diffeomorphismus von  $M$  mit der alten zu  $M$  mit der neuen glatten Struktur.

Gibt es zwischen je zwei glatten Strukturen auf  $M$  einen Diffeomorphismus? Wohl weil es so schwer vorstellbar ist, wie das schiefgehen sollte, war lange vermutet worden, dass diese Frage eine positive Antwort hat, und viele Spezialfälle wurden über die Zeit bewiesen. Etwa sagt ein berühmter Satz von Moise, dass dies für alle Mannigfaltigkeiten von Dimension höchstens drei stimmt. Aber 1954 konstruierte John Milnor völlig unerwartet ein Gegenbeispiel für  $M = S^7$ , was ihm damals die Fields-Medaille einbrachte (mit Michel Kervaire zeigte er kurze Zeit später, dass  $S^7$  genau 14 Diffeomorphieklassen von glatten Strukturen besitzt). Heutzutage kennt man auch Mannigfaltigkeiten, die gar keine glatte Struktur besitzen und weiß auch, dass der  $\mathbb{R}^4$  als einziger euklidischer Raum ebenfalls echt verschiedene glatte Strukturen trägt und zwar unendlich viele. All diese Resultate gehen aber weit über unsere Vorlesung weit hinaus und soll hier nur als Warnung dienen, dass Sie glatte Strukturen in keiner Weise als selbstverständlich betrachten sollten.

### 3. Tangentialräume und Ableitungen

Wir befinden uns nun in der etwas amüsanten Situation, dass wir zwar definiert haben, wann eine Funktion  $f: M \rightarrow N$  zwischen zwei glatten Mannigfaltigkeiten differenzierbar ist, aber gar nicht, was ihre Ableitung ist. Das wollen wir in diesem Abschnitt beheben. Hierfür erinnere ich noch einmal daran, dass für eine differenzierbare Abbildung  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  offen, die Ableitung eine Abbildung

$$Df: U \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n), \quad x \longmapsto D_x f$$

ist. Es liegt daher für  $f: M \rightarrow N$  wohl nahe, sich zwei  $C^1$ -Karten  $(U, V, \varphi)$  von  $M$  und  $(U', V', \varphi')$  von  $N$  mit  $f(U) \subseteq U'$  zu schnappen und aus der Komposition

$$V \xrightarrow{\varphi^{-1}} U \xrightarrow{f} U' \xrightarrow{\varphi'} V' \subseteq \mathbb{R}^n$$

die Abbildung

$$U \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n), \quad x \longmapsto D_{\varphi(x)}(\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1})$$

als Kandidaten für die Einschränkung der Ableitung von  $f$  zu extrahieren. Aber es hängt nicht nur ihr Definitionsbereich, sondern auch ihr Werte von der Wahl der Karten ab: Sind  $(W, Z, \psi)$  und  $(W', Z', \psi')$  weitere Karten mit  $f(W) \subseteq W'$ , so haben wir für  $x \in U \cap W$

$$\begin{aligned} D_{\psi(x)}(\psi' \circ f \circ \psi^{-1}) &= D_{\psi(x)}(\psi' \circ (\varphi')^{-1} \circ \varphi' \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \psi^{-1}) \\ &= D_{\psi'(f(x))}(\psi' \circ (\varphi')^{-1}) \circ D_{\varphi(x)}(\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ D_{\psi(x)}(\varphi \circ \psi^{-1}) \end{aligned}$$

und über die äußeren beiden Terme hier können wir wenig sagen (außer, dass sie invertierbare Matrizen sind), insbesondere gibt es keinen Grund weshalb Multiplikation mit ihnen den mittleren Term unverändert lassen sollte. Lektion von der Geschichte: Eine Abbildung  $M \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  ist die Ableitung von  $f$  nicht.

Um zu motivieren, wie wir dieses Problem angehen wollen, betrachten wir einmal den Spezialfall  $N = \mathbb{R}^n$  und  $M = h^{-1}(y)$  für ein  $h: X \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $X \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$  offen, mit regulärem Wert  $y$ . Hier haben wir:

**3.1. Lemma** *Es sei  $M = h^{-1}(y)$  für ein  $h: X \rightarrow \mathbb{R}^k$  stetig differenzierbar,  $X \subseteq \mathbb{R}^{m+k}$  offen, mit regulärem Wert  $y$ . Ist dann  $(U, V, \varphi)$  eine  $C^1$ -Karte für  $M$ , so ist auch*

$$V \xrightarrow{\varphi^{-1}} U \subseteq h^{-1}(y) \subseteq \mathbb{R}^{m+k}$$

*stetig differenzierbar und die Abbildung*

$$D_{\varphi(x)}\varphi^{-1}: \mathbb{R}^m \longrightarrow \ker(D_x h: \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k)$$

*für jedes  $x \in U$  ein linearer Isomorphismus.*

PROOF. Per Definition gilt  $h \circ \varphi^{-1} = \text{const}_y$  und daher

$$D_x h \circ D_{\varphi(x)}\varphi^{-1} = D_{\varphi(x)}(h \circ \varphi^{-1}) = 0,$$

insbesondere nimmt  $D_{\varphi(x)}\varphi^{-1}$  wirklich Werte in  $\ker(D_x h)$  an.

Um zu sehen, dass diese Abbildung bijektiv ist, nehmen wir zuerst an, dass sich  $\varphi: U \rightarrow V$  sich zu einer stetig differenzierbaren Abbildung  $\tilde{\varphi}: Y \rightarrow \mathbb{R}^m$  für eine offene Umgebung  $Y \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$  von  $U \subseteq h^{-1}(y)$  fortsetzen lässt. Denn dann definiert

$$D_x \tilde{\varphi}: \mathbb{R}^{n+k} \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

eine lineare Abbildung und aufgrund der Kettenregel folgt

$$\text{id}_{\mathbb{R}^m} = D_{\varphi(x)}(\text{id}_V) = D_{\varphi(x)}(\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}) = D_x(\tilde{\varphi}) \circ D_{\varphi(x)}(\varphi^{-1}).$$

Damit ist  $D_{\varphi(x)}(\varphi^{-1})$  zumindest injektiv, aber wegen  $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m) = m = \dim_{\mathbb{R}}(\ker(D_x h))$  dann schon bijektiv (für die zweite Gleichung erinnere ich daran, dass  $D_x h: \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$  surjektiv ist, da  $y$  ein regulärer Wert ist).

Für Karten mit der Fortsetzungseigenschaft ist die Behauptung damit bewiesen. Und die Karten für  $h^{-1}(y)$ , die wir in 1.5 mithilfe des Satzes über implizite Funktionen konstruiert haben, sind immer Einschränkungen linearer Abbildungen  $\mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$  und erfüllen diese Fortsetzungsbedingung damit trivialerweise.

Damit finden wir also schonmal immer eine Karte  $(U, V, \varphi)$  um  $x$  für die die Behauptung stimmt. Und ist  $(U', V', \varphi')$  nun eine beliebige, so haben wir

$$D_{\varphi'(x)}((\varphi')^{-1}) = D_{\varphi'(x)}(\varphi^{-1} \circ \varphi \circ (\varphi')^{-1}) = D_{\varphi(x)}(\varphi^{-1}) \circ D_{\varphi'(x)}(\varphi')^{-1},$$

was als Komposition zweier Isomorphismen dann ebenfalls einer ist.  $\square$

Ist nun  $f: h^{-1}(y) \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar, so können wir also für eine Karte  $(U, V, \varphi)$  um  $x \in h^{-1}(y)$  die Abbildung

$$D_x f: \ker(D_x h) \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \longmapsto D_{\varphi(x)}(f \circ \varphi^{-1}) \circ [D_{\varphi(x)} \varphi^{-1}]^{-1}$$

betrachten und ich behaupte: Diese ist nun unabhängig von der Wahl der Karte  $(U, V, \varphi)$ . Denn ist  $(U', V', \varphi')$  eine zweite Karte um  $x$ , so haben wir in der Tat

$$\begin{aligned} D_{\varphi'(x)}(f \circ (\varphi')^{-1}) \circ [D_{\varphi'(x)}(\varphi')^{-1}]^{-1} &= D_{\varphi'(x)}(f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ (\varphi')^{-1}) \circ [D_{\varphi'(x)}(\varphi')^{-1}]^{-1} \\ &= D_{\varphi(x)}(f \circ \varphi^{-1}) \circ D_{\varphi'(x)}(\varphi \circ (\varphi')^{-1}) \circ [D_{\varphi'(x)}(\varphi')^{-1}]^{-1} \\ &= D_{\varphi(x)}(f \circ \varphi^{-1}) \circ [D_{\varphi(x)}(\varphi' \circ \varphi^{-1})]^{-1} \circ [D_{\varphi'(x)}(\varphi')^{-1}]^{-1} \\ &= D_{\varphi(x)}(f \circ \varphi^{-1}) \circ [D_{\varphi'(x)}(\varphi')^{-1} \circ D_{\varphi(x)}(\varphi' \circ \varphi^{-1})]^{-1} \\ &= D_{\varphi(x)}(f \circ \varphi^{-1}) \circ [D_{\varphi(x)}((\varphi')^{-1} \circ \varphi' \circ \varphi^{-1})]^{-1} \\ &= D_{\varphi(x)}(f \circ \varphi^{-1}) \circ [D_{\varphi(x)} \varphi^{-1}]^{-1} \end{aligned}$$

unter mehrfacher Benutzung der Kettenregel.

Wir sehen also, dass die Ableitung einer Abbildung  $h^{-1}(y) \rightarrow \mathbb{R}^k$  sinnvollerweise nicht auf  $\mathbb{R}^m$ , sondern eben auf  $\ker(D_x h)$  definiert ist. Der Raum  $\ker(D_x h)$  heißt der Tangentialraum  $T_x M \subseteq \mathbb{R}^{m+k}$  von  $M = h^{-1}(y)$  bei  $x$ : Ohne Rückgriff auf die Funktion  $h$ , lässt er sich nämlich auch als die Menge aller Ableitungen von differenzierbaren Kurven  $\gamma: ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow M$  beschreiben (was ich einmal als einfache Aufgabe dem Leser überlasse) und diese Ableitungen liegen ja (im Wesentlichen per Definition!) genau tangential an  $M$  an.

**3.2. Beispiel** Für  $h: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x_0^2 + \dots + x_n^2, y = 1$  und  $x \in h^{-1}(1) = S^n$ , haben wir

$$D_x h: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \longmapsto 2\langle x, v \rangle$$

und damit  $\ker(D_x h) = x^\perp$ , was hoffentlich auch mit ihrer Intuition für Tangenten an Sphären übereinstimmt.

Unsere Aufgabe ist nun also für eine allgemeine  $C^k$ -Mannigfaltigkeit  $M$  einen sinnvolle Definition für den Tangentialraum  $T_x M$  zu finden. Die Ableitung einer differenzierbaren Abbildung  $f: M \rightarrow N$  wird dann eine Abbildung  $D_x f: T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$  werden. Da der Tangentialraum

im Falle  $M = h^{-1}(y)$  durch Tangentialvektoren von Kurven gegeben ist, liegt es nahe die Kurven selbst zur Definition des Tangentialraums im allgemeinen heranzuziehen. Soviel nun zum Vorgeplänkel, hier die Konstruktion:

**3.3. Konstruktion** Es sei  $M$  eine  $C^1$ -Mannigfaltigkeit und  $x \in M$  (für diese Konstruktion würde es tatsächlich ausreichen, wenn die Kartenwechsel eines Atlas von  $M$  differenzierbar, aber nicht notwendigerweise stetig differenzierbar sind). Dann definieren wir

$$T_x M := \{ \gamma: ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow \mathbb{R} \mid \gamma(0) = x \text{ und } \gamma \text{ ist differenzierbar bei } 0 \} / \sim$$

wobei  $\gamma_1 \sim \gamma_2$ , genannt *tangentiale Äquivalenz*, genau dann gelte, wenn es eine  $C^1$ -Karte  $(U, V, \varphi)$  um  $x$  mit

$$(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$$

gilt, wofür wir ein  $\delta > 0$  wählen, sodass für  $\gamma_1: ]-\epsilon_1, \epsilon_1[ \rightarrow M$  und  $\gamma_2: ]-\epsilon_2, \epsilon_2[ \rightarrow M$  zum einen  $\delta < \epsilon_1, \epsilon_2$  und zum andern

$$]-\delta, \delta[ \subseteq \gamma_1^{-1}(U), \gamma_2^{-1}(U)$$

gilt, sodass wir

$$\varphi \circ \gamma_1, \varphi \circ \gamma_2: ]-\delta, \delta[ \longrightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$$

erhalten. Offenbar hängt die Ableitung dieser Funktionen bei 0 dann nicht von der Wahl von  $\delta$  ab.

Und stimmen die Ableitungen für eine Karte überein, so tun sie das für jede: Ist  $(U', V', \psi)$  eine weitere  $C^1$ -Karte um  $x$ , so gilt nach der Kettenregel ja schließlich

$$(\psi \circ \gamma)'(0) = (\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma)'(0) = D_{\varphi(x)}(\psi \circ \varphi^{-1}) [(\varphi \circ \gamma)'(0)],$$

sodass aus  $(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$  sicherlich  $(\psi \circ \gamma_1)'(0) = (\psi \circ \gamma_2)'(0)$  folgt.

Wir wollen nun  $T_x M$  eine  $\mathbb{R}$ -Vektorraumstruktur geben. Dazu haben wir folgendes Analog von 3.1:

**3.4. Lemma** *Ist  $M$  eine  $m$ -dimensionale  $C^1$ -Mannigfaltigkeit,  $x \in M$  und  $(U, V, \varphi)$  eine  $C^1$ -Karte von  $M$  um  $x$ , so ist die Abbildung*

$$T_x M \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad [\gamma] \longmapsto (\varphi \circ \gamma)'(0)$$

eine Bijektion mit Inverser

$$I_x \varphi: \mathbb{R}^m \longrightarrow T_x M, \quad v \longmapsto [t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(x) + tv)].$$

PROOF. Wir haben offenbar

$$(\varphi \circ [t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(x) + tv)])'(0) = [t \mapsto \varphi(x) + tv]'(0) = v.$$

Das sagt zum einen sofort, dass die Komposition, die im  $\mathbb{R}^m$  startet und endet, die Identität ist, aber zum andern auch, dass eine beliebige Kurve  $\gamma$  zur Kurve  $[t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(x) + t(\varphi \circ \gamma)'(0))]$  tangential äquivalent ist, was genau sagt, dass die Komposition, die in  $T_x M$  startet und endet die Identität ist.  $\square$

Wir können also nach Wahl einer  $C^1$ -Karte  $(U, V, \varphi)$  der Menge  $T_x M$  eine  $\mathbb{R}$ -Vektorraumstruktur geben, indem wir sie mittels  $I_x \varphi$  übertragen, i.e. Addition und Skalarmultiplikation sind durch

$$[\gamma_1] + [\gamma_2] = I_x \varphi((I_x \varphi)^{-1}[\gamma_1] + (I_x \varphi)^{-1}[\gamma_2])$$

und

$$r \cdot [\gamma] = I_x \varphi(r \cdot (I_x \varphi)^{-1}[\gamma])$$

gegeben. Der Nullvektor ist  $I_x \varphi(0)$ , was einfach die Äquivalenzklasse der konstanten Kurven ist. Dass dies wirklich eine Vektorraumstruktur auf  $T_x M$  liefert, ist hoffentlich klar; und zwar ist es die eindeutige Vektorraumstruktur, für die

$$I_x \varphi: \mathbb{R}^m \longrightarrow T_x M$$

ein  $\mathbb{R}$ -linear (und damit ein  $\mathbb{R}$ -linearer Isomorphismus) ist.

Die entscheidende Behauptung ist nun, dass diese Vektorraumstruktur von der Wahl der Karte unabhängig ist: Als erstes überlegen wir dazu einmal, dass zwei Bijektionen  $f: V \rightarrow X$  und  $g: W \rightarrow X$  für eine Menge  $X$  und zwei Vektorräume  $V, W$  genau dann die gleiche Vektorraumstruktur auf  $X$  liefern, wenn die Komposition

$$V \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g^{-1}} W$$

linear ist: Denn dann ist wegen  $f = g \circ (g^{-1} \circ f)$  mit  $g$  auch  $f$  linear für eine Vektorraumstruktur auf  $X$ , sodass die Eindeutigkeit der übertragenen Vektorraumstruktur zuschlägt.

Und in unserem Fall haben wir also zu prüfen, dass

$$\mathbb{R}^m \xrightarrow{I_x \varphi} T_x M \xrightarrow{(I_x \psi)^{-1}} \mathbb{R}^m$$

für je zwei  $C^1$ -Karten von  $M$  um  $x$  wirklich  $\mathbb{R}$ -linear ist. Aber es gilt

$$(I_x \psi)^{-1}(I_x \varphi(v)) = [t \mapsto \psi(\varphi^{-1}(\varphi(x) + tv))]'(0) = D_{\varphi(x)}(\psi \circ \varphi^{-1})[t \mapsto \varphi(x) + tv]'(0) = D_{\varphi(x)}(\psi \circ \varphi^{-1})v$$

und  $D_{\varphi(x)}(\psi \circ \varphi^{-1})$  ist ja sicherlich  $\mathbb{R}$ -linear.

**3.5. Definition** Ist  $M$  eine  $C^1$ -Mannigfaltigkeit und  $x \in M$ , so heißt der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $T_x M$ , den wir gerade konstruiert haben, der *Tangentialraum* von  $M$ .

Ist  $N$  eine weitere  $C^1$ -Mannigfaltigkeit und  $f: M \rightarrow N$  bei  $x$  differenzierbar, so können wir nun versuchen die Ableitung von  $f$  durch

$$D_x f: T_x M \longrightarrow T_{f(x)} N, \quad [\gamma] \longmapsto [f \circ \gamma]$$

zu erklären; dafür haben wir noch:

**3.6. Lemma** Es seien  $M$  und  $N$   $C^1$ -Mannigfaltigkeiten,  $x \in M$ ,  $f: M \rightarrow N$  bei  $x$  differenzierbar. Dann ist  $D_x f$  wohldefiniert und für  $C^1$ -Karten  $(U, V, \varphi)$  und  $(U', V', \psi)$  von  $M$  um  $x$  beziehungsweise von  $N$  um  $f(x)$  mit  $U \subseteq f^{-1}(U')$  kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_x M & \xrightarrow{D_x f} & T_{f(x)} N \\ I_x \varphi \uparrow & & \uparrow I_{f(x)} \psi \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{D_{\varphi(x)}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Insbesondere ist  $D_x f$   $\mathbb{R}$ -linear.

PROOF. Offenbar gilt für jede bei 0 differenzierbare Kurve  $]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow M$  mit  $\gamma(0) = x$ , dass

$$(\psi \circ f \circ \gamma)'(0) = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma)'(0) = D_{\varphi(x)}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})[(\varphi \circ \gamma)'(0)]$$

Das zeigt direkt die Wohldefiniertheit von  $D_x f$  und mittels Beschreibung der Inversen von  $I_x \varphi$  und  $I_{f(x)} \psi$  in 3.4 auch den Rest.  $\square$

Damit erhalten wir endlich unseren gesuchten Begriff:

**3.7. Definition** Es seien  $M$  und  $N$   $C^1$ -Mannigfaltigkeiten,  $x \in M$ ,  $f: M \rightarrow N$  bei  $x$  differenzierbar. Dann ist die  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $D_x f: T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$  die *Ableitung* von  $f$  bei  $x$ .

Als erstes notieren wir die Kettenregel:

**3.8. Beobachtung** Es seien  $M, N$  und  $K$   $C^1$ -Mannigfaltigkeiten,  $x \in M$ ,  $f: M \rightarrow N$  bei  $x$  differenzierbar und  $g: N \rightarrow K$  bei  $f(x)$  differenzierbar. Dann ist auch  $g \circ f$  bei  $x$  differenzierbar und es gilt  $D_x(g \circ f) = D_{f(x)} g \circ D_x f$ .

Dass  $f \circ g$  nämlich wieder differenzierbar ist, folgt aus der Kettenregel der Analysis, da für drei Karten in hoffentlich evidenter Notation

$$\varphi'' \circ g \circ f \circ \varphi^{-1} = \varphi'' \circ g \circ \varphi' \circ (\varphi')^{-1} \circ f \circ \varphi^{-1}$$

und rechts die Verkettung zweier Funktionen steht, die erste per Annahme bei  $\varphi(x)$  differenzierbar und die zweite bei  $\varphi'(f(x))$ . Die Gleichung für die Ableitung ist nun aber eine völlige Trivialität: Es gilt offenbar

$$D_x(g \circ f)[\gamma] = [g \circ f \circ \gamma] = D_{f(x)}g[f \circ \gamma] = D_{f(x)}g \circ D_x f[\gamma]$$

wie gewünscht.

Viele Prinzipien aus der Analysisvorlesung übertragen sich jetzt auf Mannigfaltigkeiten, ich nenne nur ein Beispiel:

**3.9. Beispiel** Ist  $M$  eine  $C^1$ -Mannigfaltigkeit und hat die Funktion  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  bei  $x$  ein lokales Maximum und ist dort differenzierbar, so gilt  $D_x f = 0$ : Denn für eine Kurve  $\gamma: ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow M$  durch  $x$  hat dann die Komposition  $f \circ \gamma$  bei 0 ein lokales Maximum und folglich gilt  $(f \circ \gamma)'(0) = 0$ , was nach 3.4 (angewendet auf die Karte  $\text{id}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ) schon  $0 = [f \circ \gamma] = D_x f[\gamma]$  bedeutet.

Wir können also wie gewohnt Ableitungen für die Suche nach Maxima benutzen.

Die obige Definition der Ableitung ist natürlich letztlich nur so nützlich wie unser Verständnis des Tangentialraums selbst (in der Definition der Ableitung haben wir ja nicht wirklich abgeleitet!). Sie ernsthaft direkt zu benutzen ist aufgrund der schieren Größe der Menge der Kurven durch einen Punkt natürlich Wahnsinn. Eine erste Aufgabe um auf einer Mannigfaltigkeit Differentialkalkül zu betreiben, ist es also die Tangentialräume besser zu beschreiben; die Beschreibung hängt dabei stark vom Einzelfall ab. Zunächst einmal der Konsistenzcheck in den Beispielen, in denen wir schon einen funktionierenden Begriff von Ableitung hatten:

**3.10. Beispiel** (1) Ist  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge, dann ist  $U$  ja insbesondere eine glatte Mannigfaltigkeit via der Identitätskarte. In diesem Fall ist für jedes  $x \in U$

$$T_x U \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad [\gamma] \longmapsto \gamma'(0)$$

ein Isomorphismus mit Inverser  $I_x \text{id}$  und ist  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$  bei  $x$  differenzierbar, dann ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_x U & \xrightarrow{D_x f} & T_{f(x)} U \\ (-)'(0) \downarrow & & \downarrow (-)'(0) \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{D_x f} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

gemäß Kettenregel kommutativ, wo die obere horizontale Abbildung die gerade frisch definierte Ableitung bezeichnet und die untere horizontale Abbildung die Ableitung im Sinne der Analysisvorlesungen (die eigentlichen Aussage sind dann Spezialfälle von 3.4 und 3.6).

(2) Ist  $h: U \rightarrow \mathbb{R}^k$  differenzierbar,  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  offen,  $y \in \mathbb{R}^k$  ein regulärer Wert, dann ist die Abbildung

$$T_x h^{-1}(y) \longrightarrow \ker(D_x h), \quad [\gamma] \longmapsto \gamma'(0)$$

für jedes  $x \in h^{-1}(y)$  ein Isomorphismus: Linear ist sie offensichtlich und gilt  $\gamma'(0) = 0$ , so folgt offenbar auch  $(\varphi \circ \gamma)'(0) = D_x \varphi(\gamma'(0)) = 0$ , sodass sie auch injektiv ist. Und da beide Seiten Dimension  $n - k$  haben folgt die Behauptung.

Ist nun  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  differenzierbar bei  $x$ , so kommutiert

$$\begin{array}{ccc} T_x h^{-1}(y) & \xrightarrow{D_x f} & T_f(x) \mathbb{R}^n \\ \downarrow (-)'(0) & & \downarrow (-)'(0) \\ \ker(D_x h) & \xrightarrow{D_x f} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

nach der Kettenregel ebenfalls. Insbesondere können wir das benutzen, wenn  $f$  eingeschränkt auf  $h^{-1}(y)$  immer Werte in  $g^{-1}(z)$  annimmt, wobei  $g: W \rightarrow \mathbb{R}^l$ ,  $W \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, stetig

differenzierbar mit  $z \in \mathbb{R}^l$  als regulärem Wert ist, und erhalten dass dann

$$\begin{array}{ccc} T_x h^{-1}(y) & \xrightarrow{D_x f} & T_{f(x)} g^{-1}(z) \\ (-)'(0) \downarrow & & \downarrow (-)'(0) \\ \ker(D_x h) & \xrightarrow{D_x f} & \ker(D_{f(x)} g) \end{array}$$

kommutiert. Wir erhalten also in diesen Fällen einfach nur die Einschränkungen der üblichen Ableitung zurück.

Und im Falle, dass  $f$  nur auf  $h^{-1}(y)$  definiert ist, kommutiert für jede  $C^1$ -Karte  $(U, V, \varphi)$  von  $h^{-1}(y)$  nach 3.6 immer noch das rechte Quadrat in

$$\begin{array}{ccc} & T_x h^{-1}(y) & \xrightarrow{D_x f} & T_{f(x)} \mathbb{R}^n \\ & \swarrow (-)'(0) & & \downarrow (-)'(0) \\ \ker(D_x h) & \xleftarrow{D_{\varphi(x)} \varphi^{-1}} & \mathbb{R}^{m-k} & \xrightarrow{D_{\varphi(x)}(f \circ \varphi^{-1})} & \mathbb{R}^n \\ & \uparrow I_x \varphi & & & \end{array}$$

und das linke per Inspektion. Mit anderen Worten es kommutiert

$$\begin{array}{ccc} T_x h^{-1}(y) & \xrightarrow{D_x f} & T_{f(x)} \mathbb{R}^n \\ (-)'(0) \downarrow & & \downarrow (-)'(0) \\ \ker(D_x h) & \xrightarrow{D_{\varphi(x)}(f \circ \varphi^{-1}) \circ [D_{\varphi(x)} \varphi^{-1}]^{-1}} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Es entspricht in diesem Fall also die neu eingeführte Ableitung unter der Identifikation der Tangentialräume genau der Konstruktion, die ich im Anschluss an 3.1 zur Motivation der Definition des Tangentialraums gegeben hatte.

- (3) Hier ein einfaches konkretes Beispiel: Betrachte für  $\rho \in O(n+1)$  die Abbildung  $\rho: S^n \rightarrow S^n$ . Da die Komposition

$$S^n \xrightarrow{\text{incl}} \mathbb{R}^{n+1} \xrightarrow{\rho} \mathbb{R}^{n+1}$$

aus zwei glatten Abbildungen besteht, ist sie ebenfalls glatt und demzufolge ist sie das nach dem Kriterium aus 2.5 auch, wenn wir sie als Abbildung  $S^n \rightarrow S^n$  auffassen. Und da für  $x \in S^n$  haben wir  $D_x \rho = \rho$ , wenn wir  $\rho$  als Selbstabbildung von  $\mathbb{R}^{n+1}$  auffassen. Es folgt dann aus 3.2 und obigen Diagrammen, dass

$$\begin{array}{ccc} T_x S^n & \xrightarrow{D_x \rho} & T_{\rho(x)} S^n \\ (-)'(0) \downarrow & & \downarrow (-)'(0) \\ x^\perp & \xrightarrow{\rho} & \rho(x)^\perp \end{array}$$

kommutiert. Mit anderen Worten, die Ableitung von  $\rho$  als Abbildung auf der Sphäre ist zwar immer noch durch  $\rho$  gegeben, aber eben auf einem vom Fußpunkt abhängigen Vektorraum.

Nun ein Beispiel eines Tangentialraums einer abstrakten Mannigfaltigkeit. Zur Vorbereitung:

**3.11. Lemma** Die Abbildung  $\pi: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^n, x \mapsto \mathbb{R}x$  ist glatt, und für  $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  ist

$$D_x \pi: \mathbb{R}^{n+1} = T_x \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow T_{\mathbb{R}x} \mathbb{R}P^n$$

surjektiv mit Kern  $\mathbb{R}x$ .

PROOF. Wir benutzen die Standardkarten des  $\mathbb{R}P^n$  aus 2.5, deren Inverse durch

$$e_i^{-1}: U_i \longrightarrow \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \neq 0\}, \quad [x_0, \dots, x_n] \longmapsto \left( \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right)$$

gegeben ist, wo  $U_i = \{L \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \mid L \cap (\mathbb{R}^{i-1} \times \{0\} \times \mathbb{R}^{n-i+1}) = \{0\}\}$ . Insbesondere ist die Komposition

$$\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \neq 0\} = \pi^{-1}(U_i) \xrightarrow{\pi} U_i \xrightarrow{e_i^{-1}} \mathbb{R}^n$$

durch

$$x \longmapsto \left( \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right)$$

gegeben, was sicherlich glatt ist.

Die Ableitung dieser Abbildung bei  $x$  ist dann durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{x_i} & 0 & \dots & 0 & \frac{-x_1}{x_i^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_i} & \dots & 0 & \frac{-x_2}{x_i^2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{x_i} & \frac{-x_{i-1}}{x_i^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{-x_{i+1}}{x_i^2} & \frac{1}{x_i} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{-x_n}{x_i^2} & 0 & \dots & \frac{1}{x_i} \end{pmatrix} \in \text{Mat}(n+1, n, \mathbb{R})$$

gegeben, welche offensichtlich vollen Rang hat und damit eine Surjektion darstellt. Nach 3.6 ist dann auch  $D_x \pi$  surjektiv. Und da der Kern folglich eindimensional ist, reicht es für das letzte Statement zu prüfen, dass  $x$  im Kern liegt. Das folgt in der Matrixdarstellung einfach durch Einsetzen, oder auch weil die Kurve  $t \mapsto x + tx$ , die den zu  $x$  gehörigen Tangentialvektor in  $T_x \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  repräsentiert von  $\pi$  auf die konstante Kurve mit Wert  $\mathbb{R}x$  abgebildet wird (konstante Kurven repräsentieren immer die Null im Tangentialraum!).  $\square$

Die Abbildung  $D_x \pi: \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow T_l \mathbb{R}^n$  für ein  $0 \neq x \in l \in \mathbb{R}P^n$  faktorisiert also über einen Isomorphismus

$$d_x: \mathbb{R}^{n+1}/l \longrightarrow T_l \mathbb{R}^n,$$

der allerdings von der Wahl von  $x$  abhängt (hier bezeichnet  $\mathbb{R}^{n+1}/l$  den Quotientenvektorraum nach dem Unterraum  $l$ ). Und je kanonischer wir den Tangentialraum einer Mannigfaltigkeit beschreiben können, desto einfacher ist es natürlich mit ihm zu arbeiten (eine unkanonische Beschreibung haben wir ja auch schon in 3.4 durch Kartenwahl gegeben). Eine Beschreibung von  $T_l \mathbb{R}^n$ , die keiner weiteren Wahlen bedarf erhält man nun jedenfalls wie folgt:

**3.12. Korollar** Für jedes  $l \in \mathbb{R}P^n$  ist die Abbildung

$$c_l: T_l \mathbb{R}^n \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(l, \mathbb{R}^{n+1}/l), \quad v \longmapsto \left[ x \mapsto \begin{cases} 0 & x = 0 \\ d_x^{-1}(v) & x \neq 0 \end{cases} \right]$$

ein  $\mathbb{R}$ -linearer Isomorphismus.

PROOF. Zunächst einmal gilt es zu zeigen, dass  $c_l(v)$  wirklich eine lineare Abbildung ist: Da  $l$  eindimensional ist, reicht es hierfür wiederum zu zeigen, dass  $(c_l(v))(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot (c_l(v))(x)$  für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $x \in l$  gilt; dann ist ja schließlich

$$\begin{aligned} (c_l(v))(\lambda \cdot x) + (c_l(v))(\lambda' \cdot x) &= \lambda \cdot (c_l(v))(x) + \lambda' \cdot (c_l(v))(x) = (\lambda + \lambda') \cdot (c_l(v))(x) \\ &= (c_l(v))((\lambda + \lambda') \cdot x) = (c_l(v))(\lambda \cdot x + \lambda' \cdot x), \end{aligned}$$

was die Additivität liefert da für ein  $x \neq 0$  jedes Element in  $l$  von der Form  $\lambda x$  für ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist.

Ist nun  $\lambda = 0$  oder  $x = 0$  so steht hier auf beiden Seiten 0. Für  $\lambda \neq 0$  beobachten wir, dass wir für

$$\mu_\lambda: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, \quad z \rightarrow \lambda z$$

offenbar  $\pi \circ \mu_\lambda = \pi$  haben und daher für  $x \neq 0$

$$D_x \pi = D_x(\pi \circ \mu_\lambda) = D_{\lambda x} \pi \circ D_x \mu_\lambda = D_{\lambda x} \pi \circ \mu_\lambda = \lambda \cdot D_{\lambda x} \pi,$$

oder mit anderen Worten  $\lambda \cdot d_x^{-1} = d_{\lambda x}^{-1}$ . Damit rechnen wir

$$(c_l(v))(\lambda \cdot x) = d_{\lambda \cdot x}^{-1}(v) = \lambda \cdot d_x^{-1}(v) = \lambda \cdot (c_l(v))(x)$$

wie gewünscht.

Damit ist  $c_l$  schon einmal wohldefiniert. Die Linearität von  $c_l$  folgt direkt aus der von  $d_x$  und  $c_l$  ist injektiv, da für  $v \neq 0$  und  $x \neq 0$  sicherlich auch  $(c_l(v))(x) = d_x^{-1}(v) \neq 0$  ist ( $d_x^{-1}$  ist ja injektiv!) und damit ist sicherlich auch  $c_l(v) \neq 0$ . Aber dann folgt auch die Surjektivität, da offenbar

$$\dim_{\mathbb{R}}(T_l \mathbb{R}P^n) = n = 1 \cdot (n + 1 - 1) = \dim_{\mathbb{R}}(l) \cdot \dim(\mathbb{R}^{n+1}/l) = \dim_{\mathbb{R}}(\text{Hom}_{\mathbb{R}}(l, \mathbb{R}^{n+1}/l))$$

gilt. □

**3.13. Beispiel** (1) Man überlegt sich nun leicht, dass die Ableitung der Abbildung  $\pi: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^n$ , mit der wir die Überlegungen gestartet haben, das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_x \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} & \xrightarrow{D_x \pi} & T_{\mathbb{R}x} \mathbb{R}P^n \\ (-)'\!(0) \downarrow & & \downarrow c_{\mathbb{R}x} \\ \mathbb{R}^{n+1} & \xrightarrow{v \mapsto [\lambda x \mapsto \lambda v]} & \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}x, \mathbb{R}^{n+1}/\mathbb{R}x) \end{array}$$

zum kommutieren bringt.

(2) Als erstes nicht-triviales Beispiel werden Sie sich in den Übungen überlegen müssen, dass für ein  $A \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$  die Abbildung

$$A \cdot - : \mathbb{R}P^n \longrightarrow \mathbb{R}P^n, \quad l \mapsto A \cdot l$$

glatt ist und ihre Ableitung bei  $l \in \mathbb{R}P^n$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_l \mathbb{R}P^n & \xrightarrow{D_l A} & T_{A \cdot l} \mathbb{R}P^n \\ c_l \downarrow & & \downarrow c_{A \cdot l} \\ \text{Hom}_{\mathbb{R}}(l, \mathbb{R}^{n+1}/l) & \xrightarrow{f \mapsto A \circ f \circ A^{-1}} & \text{Hom}_{\mathbb{R}}(A \cdot l, \mathbb{R}^{n+1}/A \cdot l) \end{array}$$

zum kommutieren bringt. Kurzum: Die Ableitung von  $A$  bei  $l$  ist durch Konjugation mit  $A$  gegeben.

(3) Man kann auch das Inverse von  $c_l: T_l \mathbb{R}P^n \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(l, \mathbb{R}^{n+1}/l)$  explizit angeben: Dazu betrachte man die Abbildung

$$\text{Hom}_{\mathbb{R}}(l, \mathbb{R}^{n+1}) \longrightarrow T_l \mathbb{R}P^n, \quad \varphi \mapsto [t \mapsto \text{im}(\text{id}_l + t\varphi)];$$

für klein genug  $t$  ist  $\text{id}_l + t\varphi$  injektiv (die Injektionen bilden eine offene Teilmenge in allen linearen Abbildungen) und deshalb das Bild von  $\text{id} + t\varphi$  wirklich ein Element von  $\mathbb{R}P^n$ . Die Linearität prüft man nun in einer Karte. Offenbar schickt sie  $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(l, l)$  auf die konstante Kurve mit Wert  $l$  und faktorisiert also über eine Abbildung

$$\text{Hom}_{\mathbb{R}}(l, \mathbb{R}^{n+1})/\text{Hom}_{\mathbb{R}}(l, l) \longrightarrow T_l \mathbb{R}P^n$$

Und Postkomposition mit der Projektion  $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}/l$  liefert einen Isomorphismus

$$\text{Hom}_{\mathbb{R}}(l, \mathbb{R}^{n+1})/\text{Hom}_{\mathbb{R}}(l, l) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(l, \mathbb{R}^{n+1}/l)$$

Invertieren wir ihn erhalten wir die gesuchte Abbildung  $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(l, \mathbb{R}^{n+1}/l) \rightarrow T_l \mathbb{R}P^n$ , von der man nun direkt prüft, dass sie invers zu  $c_l$  ist.

(4) Ausgestattet mit dem Wissen aus 3.12 und vorigem Punkt liegt es vielleicht nahe zu raten, dass es kanonische Isomorphismen

$$T_P \text{Gr}_k(\mathbb{R}^n) \cong \text{Hom}_{\mathbb{R}}(P, \mathbb{R}^n/P)$$

gibt. Das ist richtig und die Konstruktion der Abbildung im vorigen Punkt überträgt sich auf den Fall der Grassmann'schen und liefert so einen Isomorphismus. Auch das kann man in Karten prüfen, wir werden es aber später etwas eleganter tun, indem wir die Abbildung aus 3.12 noch etwas geschickter konstruieren, siehe ??.

So viel zu einzelnen Tangentialräumen. Unser nächstes Ziel ist es die Tangentialräume zu einem einzigen Objekt, dem Tangentialbündel, zu vereinigen. Zur Motivation bemerke nur, dass wir zwar nun wissen was die Ableitung einer differenzierbaren Funktion an einem Punkt ist, aber immer noch nicht formulieren können in welchem Sinne die Ableitung einer stetig differenzierbaren Funktion zwischen Mannigfaltigkeiten wieder stetig ist: Dazu müssten ja die Tangentialraum an unterschiedlichen Punkten miteinander sprechen.

Im Falle  $M = h^{-1}(y)$  für  $h: U \rightarrow \mathbb{R}^l$   $k$ -fach stetig differenzierbar,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, und  $y$  ein regulärer Wert, ist das Tangentialbündel einfach durch den Unterraum

$$Th^{-1}(y) = \{(x, v) \in h^{-1}(y) \times \mathbb{R}^n \mid v \in \ker(D_x h)\}$$

des  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  gegeben. Diese Konstruktion wollen wir nun im allgemeinen nachahmen:

**3.14. Konstruktion** Ist  $M$  eine  $C^l$ -Mannigfaltigkeit,  $l \geq 1$ , so setzen wir

$$TM := \{\gamma: ]\epsilon, \epsilon[ \rightarrow M \mid \gamma \text{ ist differenzierbar bei } 0\} / \sim$$

wobei  $\gamma_1 \sim \gamma_2$  genau dann, wenn  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$  und  $\gamma_1'(0) = \gamma_2'(0)$ ; wir benutzen hier natürlich, dass wir mittlerweile Abbildungen in eine Mannigfaltigkeit differenzieren können. Die Abbildung

$$\pi_M: TM \longrightarrow M, \quad [\gamma] \longmapsto \gamma(0)$$

heißt die *Fußpunktabbildung*. Beachte, dass wir  $\pi^{-1}(x) = T_x M$  haben.

Für eine  $C^l$ -Karte  $(U, V, \varphi)$  erhalten wir dann die Abbildung

$$I\varphi: U \times \mathbb{R}^m \longrightarrow TM, \quad (x, v) \longmapsto (I_x \varphi)(v)$$

und wir geben  $TM$  eine Topologie indem wir eine Teilmenge  $W \subseteq TM$  als offen deklarieren, wenn  $(I\varphi)^{-1}(W) \subseteq U \times \mathbb{R}^m$  für jede  $C^l$ -Karte von  $M$  offen ist. Dass dies wirklich eine Topologie ist, ist hoffentlich klar (es ist zum Beispiel der Durchschnitt der von den  $I\varphi$  coinduzierten Topologien auf  $TM$ ).

Ausgestattet damit heißt  $TM$  das *Tangentialbündel* von  $M$ .

**3.15. Bemerkung** In der Physik, insbesondere der Mechanik, läuft  $TM$  häufig auch unter dem Namen *Zustandsraum*, wenn  $M$  der *Positionsraum* des betrachteten Systems ist: Entspricht ein Punkt in  $M$  der Positionen des physikalischen Systems, so entspricht ein Punkt in  $TM$  der Position des Systems (nämlich das Bild unter  $\pi$ ) zusammen mit den Geschwindigkeit aller beteiligten Objekte, aus dem sich laut den Gesetzen der Mechanik unter vorausgesetzter Bekanntheit aller wirkenden Kräfte alle zukünftigen Zustände des Systems vorhersagen lassen.

Wir beobachten nun:

**3.16. Lemma** *Ist  $M$  eine  $C^l$ -Mannigfaltigkeit,  $l \geq 1$ , und  $(U, V, \varphi)$  eine  $C^l$ -Karte von  $M$ . Dann ist*

$$I\varphi: U \times \mathbb{R}^m \longrightarrow TM$$

*ein Homöomorphismus auf die offene Teilmenge  $\pi^{-1}(U) = TU$  von  $TM$ .*

PROOF. Dass die Abbildung stetig ist folgt natürlich direkt aus der Definition der Topologie. Und um zu sehen, dass sie offen ist müssen wir zeigen, dass für jede weitere  $C^l$ -Karte  $(U', V', \psi)$  von  $M$

$$I\psi^{-1}I\varphi(W) \subseteq U' \times \mathbb{R}^m$$

für jedes offene  $W \subseteq U \times \mathbb{R}^m$  offen ist. Da sowohl  $I\varphi$  also auch  $I\psi$  offenbar injektiv sind, ist dies einfach das Bild von  $W$  unter der Abbildung

$$I\psi^{-1}I\varphi: (U \cap U') \times \mathbb{R}^m \longrightarrow (U \cap U') \times \mathbb{R}^m$$

Aber es gilt

$$I\psi^{-1}(I\varphi(x, v)) = (x, [t \mapsto \psi(\varphi^{-1}(\varphi(x) + tv))]'(0)) = (x, D_{\varphi(x)}(\psi \circ \varphi^{-1})v)$$

und  $(x, v) \mapsto (x, D_{\varphi(x)}(\psi \circ \varphi^{-1})(v))$  ist ein Homöomorphismus mit Inverser  $(x, v) \mapsto (x, D_{\psi(x)}(\varphi \circ \psi^{-1})(v))$ ; dies ist der erste Mal, dass wir wirklich benutzen, dass wir die Kartenwechsel *stetig*

differenzierbar voraussetzen! Jedenfalls schickt diese Abbildung nun offene Mengen auf offene Mengen, was wir zeigen wollten.  $\square$

**3.17. Beobachtung** Insbesondere sehen wir, dass  $TM$  selbst wieder eine Mannigfaltigkeit der Dimension  $2m$  ist, mit Karten gegeben durch die Kompositionen

$$\pi_M^{-1}(U) \xrightarrow{(I\varphi)^{-1}} U \times \mathbb{R}^m \xrightarrow{\varphi \times \text{id}} V \times \mathbb{R}^m.$$

wobei  $(U, V, \varphi)$  einen  $C^l$ -Atlas von  $M$  durchläuft. In den Übungen werden Sie zeigen müssen, dass diese Karten sogar einen  $C^{l-1}$ -Atlas von  $TM$  bilden.

Ist  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  einfach selbst eine offene Teilmenge, so besagt 3.16 insbesondere dass die Abbildung

$$TV \longrightarrow V \times \mathbb{R}^m, \quad [\gamma] \longmapsto (\gamma(0), \gamma'(0))$$

ein Homöomorphismus ist.

**3.18. Definition** Sind  $M, N$   $C^l$ -Mannigfaltigkeiten,  $l \geq 1$  und  $f: M \rightarrow N$  differenzierbar, so setzen ist

$$Df: TM \longrightarrow TN, \quad [\gamma] \longmapsto [f \circ \gamma]$$

die *Ableitung* von  $f$ .

Offenbar erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{Df} & TN \\ \downarrow \pi_M & & \downarrow \pi_N \\ M & \xrightarrow{f} & N, \end{array}$$

es schränkt sich also  $Df$  wirklich zu einer Abbildung  $T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$  ein, die (per Konstruktion) genau die Ableitung  $D_x f$  bei  $x$  ist.

Wir beobachten auch noch, dass die Inversen der Karten

$$\pi_M^{-1}(U) \xrightarrow{(I\varphi)^{-1}} U \times \mathbb{R}^m \xrightarrow{\varphi \times \text{id}} V \times \mathbb{R}^m.$$

des Tangentialbündels einfach durch die Ableitungen

$$V \times \mathbb{R}^m \rightarrow TV \xrightarrow{D\varphi} TV$$

gegeben ist, wo die erste Abbildung einfach die kanonische Identifikation aus 3.17 ist.

Hoffentlich können Sie dieses Gesamtpaket, wenn auch etwas komplizierter, als ebenso elegant wertschätzen, wie den Begriff der Ableitung in mehreren Variablen aus den Analysisvorlesungen, den wir ja verallgemeinern wollten. Die Kettenregel nimmt als direkte Konsequenz von 3.8 sogar ihre wohl simpelste Form an:

**3.19. Korollar** *Es seien  $M, N$  und  $K$   $C^1$ -Mannigfaltigkeiten und  $f: M \rightarrow N$  und  $g: N \rightarrow K$  differenzierbar. Dann ist auch  $g \circ f$  differenzierbar und es gilt  $D(g \circ f) = Dg \circ Df$  als Abbildung  $TM \rightarrow TK$ .*

Und wir notieren noch folgende direkte Konsequenz von 3.6:

**3.20. Beobachtung** Es seien  $M, N$   $C^l$ -Mannigfaltigkeiten,  $l \geq 1$ ,  $f: M \rightarrow N$  differenzierbar und  $(U, V, \varphi)$  und  $(U', V', \psi')$   $C^l$ -Karten von  $M$  beziehungsweise  $N$  mit  $U \subseteq f^{-1}(U')$ . Dann kommutiert

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{Df} & TN \\ \uparrow D\varphi^{-1} & & \uparrow D\psi^{-1} \\ V \times \mathbb{R}^m & \xrightarrow{(x,v) \mapsto ((\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x), D\varphi(x)(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})v)} & V' \times \mathbb{R}^m \end{array}$$

Insbesondere ist  $Df$  stetig genau dann, wenn  $f$  stetig differenzierbar ist, und  $(l-1)$ -fach (stetig) differenzierbar, wenn  $f$  selbst  $l$ -fach (stetig) differenzierbar ist.

Es verhält sich also unser neuer Begriff von Ableitung auch in dieser Hinsicht genau wie gewünscht. Man kann nun also anfangen die Techniken aus den Analysisvorlesungen in die Allgemeinheit von Mannigfaltigkeiten zu übertragen, aber das wird nicht in dieser Vorlesung passieren; wir notieren nur noch den Satz über die Umkehrfunktion:

**3.21. Korollar** Sind  $M$  und  $N$   $C^l$ -Mannigfaltigkeiten und  $f: M \rightarrow N$   $l$ -fach stetig differenzierbar und  $x \in M$  derart, dass  $D_x f: T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$  ein Isomorphismus ist, dann gibt es Umgebungen  $x \in U \subseteq M$  und  $f(x) \in V \subseteq N$  derart, dass  $f$  sich zu einem Homöomorphismus  $f: U \rightarrow V$  einschränkt, dessen Umkehrabbildung wieder  $l$ -fach stetig differenzierbar ist.

Insbesondere ist nach der Kettenregel dann  $Df: TU \rightarrow TV$  ebenfalls ein Homöomorphismus.

#### 4. Faserbündel

Das Tangentialbündel ist das prototypische Beispiel folgenden allgemeinen Begriffs mit dem wir uns nun im allgemeinen befassen werden:

**4.1. Definition** Eine stetige Abbildung  $\pi: E \rightarrow B$  heißt *lokal trivial*, wenn es zu jedem  $b \in B$  eine Umgebung  $U \subseteq B$  zusammen mit einem Homöomorphismus  $\varphi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \pi^{-1}(b)$  gibt, derart dass

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times \pi^{-1}(b) \\ & \searrow \pi & \swarrow \text{pr}_1 \\ & U & \end{array}$$

kommutiert; so ein Paar  $(U, \varphi)$  heißt *lokale Trivialisierung* von  $\pi$ . Man nennt  $E$  meist den *Total- und  $B$  den Basisraum* des Bündels.

Für einen topologischen Raum  $F$  heißt  $\pi$  ein *Faserbündel mit typischer Faser  $F$* , wenn es ähnlich zu jedem  $b \in B$  eine Umgebung  $U \subseteq B$  und einen Homöomorphismus  $\varphi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$  gibt, derart dass

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times F \\ & \searrow \pi & \swarrow \text{pr}_1 \\ & U & \end{array}$$

Ein solches Paar  $(U, \varphi)$  heißt eine *Bündelkarte* von  $\pi$ .

Eine lokaltriviale Abbildung ist also genau dann ein Faserbündel, wenn alle ihre Fasern  $\pi^{-1}(b)$  homöomorph zueinander sind. Ein *Bündelabbildung* zwischen zwei lokal trivialen Abbildungen (oder eben Bündeln)  $\pi: E \rightarrow B$  und  $\pi': E' \rightarrow B'$  besteht aus einem Paar stetiger Abbildungen  $g: E \rightarrow E'$  und  $f: B \rightarrow B'$  derart, dass

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g} & E' \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi' \\ B & \xrightarrow{f} & B' \end{array}$$

kommutiert. Bei  $B = B'$  und  $f = \text{id}$  spricht man von einer *Bündelabbildung* über  $B$ . Der einfacheren Notation halber schreibt man häufig noch

$$E_b \text{ und } E|_U \text{ für } \pi^{-1}(b) \text{ und } \pi^{-1}(U)$$

bei  $b \in B$  und  $U \subseteq B$ , wenn die Projektion  $\pi$  aus dem Kontext klar ist.

Wir notieren sofort:

**4.2. Beispiel** (1) Für eine  $C^1$ -Mannigfaltigkeit  $M$  ist  $\pi_M: TM \rightarrow M$  ein Faserbündel mit typischer Faser  $\mathbb{R}^m$  (wobei  $m$  wie immer die Dimension von  $M$  bezeichnet): Die Bündelkarten sind genau die (Inversen der) Homöomorphismen

$$I\varphi: U \times \mathbb{R}^m \longrightarrow TM|_U$$

aus 3.16 für Karten  $C^1$ -Karten  $(U, V, \varphi)$  von  $M$  (im Wesentlichen also einfach die Ableitungen der Karten). Und für eine stetig differenzierbare Abbildung  $f: M \rightarrow N$  ist

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{Df} & TN \\ \downarrow \pi_M & & \downarrow \pi_N \\ M & \xrightarrow{f} & N, \end{array}$$

eine Bündelabbildung.

- (2) Eine *Trivialisierung* eines Faserbündels  $\pi: E \rightarrow B$  mit typischer Faser  $F$  ist ein Homöomorphismus  $\varphi: E \rightarrow B \times F$  mit  $\pi = \text{pr}_1 \circ \varphi$ . Die in dieser Sprechweise trivialen Abbildungen sind also die Projektionen eines Produkt auf einen Faktor, und Faserbündel sehen eben lokal (in der Basis!) so aus.
- (3) Für zwei Faserbündel  $\pi: E \rightarrow B$  und  $\pi': E' \rightarrow B'$  mit typischen Fasern  $F$  und  $F'$  ist  $\pi \times \pi': E \times E' \rightarrow B \times B'$  ein Faserbündel mit typischer Faser  $F \times F'$  und für eine Teilmenge  $D \subseteq B$  ist auch  $E|_D \rightarrow D$  wieder ein Faserbündel mit Faser  $F$ . Beides ist hoffentlich offensichtlich (man verwende das Produkt der Karten beziehungsweise ihren Schnitt mit  $D$ ).
- (4) Wendet man dies mit  $B' = *$  an erhält man, dass  $\pi: \text{pr}_1: E \times F' \rightarrow B$  wieder ein Bündel mit Faser  $F \times F'$  ist, und wendet man es bei  $B = B'$  mit  $D$  der Diagonalen in  $B \times B$  an, erhält man auch noch, dass

$$\{(e, e') \in E \times E' \mid \pi(e) = \pi(e')\} \longrightarrow B, \quad (e, e') \rightarrow \pi(e) = \pi(e'),$$

das sogenannte *Faserprodukt* von  $\pi$  und  $\pi'$  ein Faserbündel mit typischer Faser  $F \times F'$  ist. Den Totalraum bezeichnet man meist mit  $E \times_B E'$ , wenn die Projektionen aus dem Kontext klar sind.

Aber Bündel gibt es wie Sand am Meer und sie sind eines der vielleicht nützlichsten Konzept der Topologie. Bevor ich weitere Beispiele gebe, beobachten wir noch, dass  $TM$  als ein bloßes Faserbündel mit typischer Faser  $\mathbb{R}^m$  die Vektorraumstruktur auf den einzelnen Tangentialräumen vergisst. Diese greifen wir im folgenden Begriff noch auf:

**4.3. Definition** Ist  $K$  ein topologischer Körper, so ist *Vektorbündel* über  $K$  ist eine lokal triviale Abbildung  $\pi: E \rightarrow B$  zusammen mit zwei Bündelabbildungen

$$+ : E \times_B E \longrightarrow E \quad \text{und} \quad \cdot : K \times E \longrightarrow E$$

über  $B$  so, dass

- (1) die Einschränkungen

$$E_b \times E_b = (E \times_B E)_b \longrightarrow E_b \quad \text{und} \quad K \times E_b = (K \times E)_b \longrightarrow E_b$$

geben  $E_b$  die Struktur eines topologischen  $K$ -Vektorraums geben, und

- (2) es um jeden Punkt  $b \in B$  eine lokale Trivialisierung  $(U, \varphi)$ , derart dass die Einschränkungen

$$E_{b'} \xrightarrow{\varphi} \{b'\} \times E_b \xrightarrow{\text{pr}_2} E_b$$

von  $\phi: E|_U \rightarrow U \times E_b$  für alle  $b' \in U$   $K$ -linear sind.

Ein Vektorbündel heißt *n-dimensional*, wenn jede Faser linear homöomorph zu  $K^n$  mit der Produkttopologie ist.

Eine Bündelabbildung  $(f, g)$  von einem Vektorbündel  $\pi: E \rightarrow B$  in ein weiteres  $\pi': E' \rightarrow B'$  heißt ebenfalls *fasernweise linear* (oder auch eine *Vektorbündelabbildung*), wenn die Abbildung  $g: E_b \rightarrow E'_{f(b)}$  für jedes  $b \in B$  linear ist.

Insbesondere ist also ein  $n$ -dimensionales Vektorbündel also ein Faserbündel mit typischer Faser  $K^n$  (man beachte, dass dies etwas stärker ist als nur zu fordern, dass die Fasern  $E_b$  alle Dimension  $n$  haben, sie müssen auch noch die korrekte Topologie tragen. Für  $K = \mathbb{R}$  hatten wir aber in den Übungen gesehen, dass dafür allein die Hausdorffeigenschaft schon ausreicht. Als kleine Fingerübung überlegen man sich einmal, dass die Abbildung  $n: B \rightarrow E$ , die einem Punkt

$b$  die Null aus dem Vektorraum  $E_b$  zuordnet stetig ist. Sie erfüllt offenbar  $\pi \circ n = \text{id}_B$  und heißt der *Nullschnitt* des Vektorbündels.

**4.4. Beispiel** Für eine  $C^1$ -Mannigfaltigkeit  $M$  ist  $\pi_M: TM \rightarrow M$  zusammen mit den fasernweisen  $\mathbb{R}$ -Vektorraumstrukturen die wir nach 3.4 konstruiert haben ein Vektorbündel: Für jede  $C^1$ -Karte  $(U, V, \varphi)$  kommutieren

$$\begin{array}{ccc} (TM \times_M TM)|_U & \xrightarrow{+} & TM|_U \\ \uparrow \scriptstyle{(x,v,w) \mapsto (I_x \varphi(v), I_x \varphi(w))} & & \uparrow \scriptstyle{I\varphi} \\ U \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m & \xrightarrow{(x,v,w) \mapsto (x,v+w)} & U \times \mathbb{R}^m \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times TM|_U & \longrightarrow & TM|_U \\ \uparrow \scriptstyle{\text{id}_{\mathbb{R}} \times I\varphi} & & \uparrow \scriptstyle{I\varphi} \\ \mathbb{R} \times U \times \mathbb{R}^m & \xrightarrow{(t,x,v) \mapsto (x,tv)} & U \times \mathbb{R}^m \end{array}$$

was die Stetigkeit der Addition und Multiplikation zeigt, und dass die Karten  $I\varphi$  fasernweise linear sind, stimmt per Definition der Vektorraumstruktur auf den Tangentialräumen.

Und für eine stetig differenzierbare Abbildung  $f: M \rightarrow N$  ist

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{Df} & TN \\ \downarrow \scriptstyle{\pi_M} & & \downarrow \scriptstyle{\pi_N} \\ M & \xrightarrow{f} & N, \end{array}$$

nach 3.6 dann fasernweise linear.

Wir damit die neu gefundene Struktur des Tangentialbündels in einen Begriff gegossen, den wir nun etwas allgemeiner analysieren werden um ein Gefühl für die Situation zu erhalten. Bevor wir uns dafür weiteren Beispielen von Faserbündeln zuwenden, noch eine letzte Bemerkung über Tangentialbündel und Ableitungen. Ist  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  offen und  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar, so übersetzen wir mittels des Diagrams zwischen der neuen Perspektive auf Ableitungen (in der oberen Zeile)

$$\begin{array}{ccc} TU & \xrightarrow{Df} & T\mathbb{R}^n \\ \downarrow \scriptstyle{[\gamma] \mapsto (\gamma(0), \gamma'(0))} & & \downarrow \scriptstyle{[\gamma] \mapsto (\gamma(0), \gamma'(0))} \\ U \times \mathbb{R}^m & \xrightarrow{(x,v) \mapsto (f(x), D_x f(v))} & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \end{array}$$

und der alten (in der unteren Zeile), in welcher  $Df$  eine stetige Abbildung  $U \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  ist. Diese alte Perspektive ist natürlich um einiges einfacher, aber eben im allgemeinen nicht mehr möglich. Wann genau ist sie denn noch möglich? Offenbar für eine Abbildung  $f: M \rightarrow N$  genau dann, wenn sowohl  $TM$  und  $TN$  trivial sind, wir also fasernweise lineare Bündelhomöomorphismen

$$p: TM \rightarrow M \times \mathbb{R}^m \quad \text{und} \quad q: TN \rightarrow N \times \mathbb{R}^n$$

finden können: Dann können wir die Ableitung von  $f$  schließlich via der Komposition

$$M \times \mathbb{R}^m \xrightarrow{p^{-1}} TM \xrightarrow{Df} TN \xrightarrow{q} N \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{pr_1} \mathbb{R}^n$$

als Abbildung  $M \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  kodieren. Und wieder ist das natürlich viel einfacher als eine Bündelabbildung  $TM \rightarrow TN$  betrachten zu müssen. Es ist also von großem Interesse zu entscheiden, ob es eine solche Trivialisierung von  $TM$  gibt, man nennt sie eine *Parallelisierung*, da die Fasern der Projektion  $M \times \mathbb{R}^m \rightarrow M$  ja alle parallel zu einander liegen (im Gegensatz zu den Tangentialräumen etwa im Beispiel der Sphäre). Im allgemeinen ist das ein schwieriges Problem: Genau welche der Sphären  $S^n$  parallelisierbar sind wurde erst in den 1950'ern von Kervaire und Milnor (kruz nach dem Fund der exotischen glatten Strukturen auf  $S^7$ ) als Anwendung des Bott'schen Periodizitätssatzes gelöst und beinahe gleichzeitig von Adams. Die Antwort (die ich

hier nicht verraten will) ist in keinster Weisen offensichtlich und der Beweis geht weit über die Möglichkeiten unserer Vorlesung hinaus; wir werden nur einige Spezialfälle beweisen können.

**4.5. Beispiel** (1) Die Projektion  $V_k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$  ist ein Faserbündel mit typischer Faser  $\text{GL}_k(\mathbb{R})$ . Ich erinnere dafür an die Mannigfaltigkeitskarten der Grassmann'schen: Für eine Zerlegung  $P \oplus Q = \mathbb{R}^n$  mit  $P \in \text{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$  ist

$$U_Q := \{V \in \text{Gr}_k(\mathbb{R}^n) \mid V \cap Q = \{0\}\}$$

eine offene Umgebung von  $P$  und die Abbildungen

$$\text{Hom}_{\mathbb{R}}(P, Q) \longrightarrow U_Q, \quad A \mapsto \text{im}(\text{id} + A)$$

und

$$\varphi: U_Q \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(P, Q), \quad V \mapsto [P \xrightarrow{\text{pr}_P^{-1}} V \xrightarrow{\text{pr}_Q} Q]$$

sind inverse Homöomorphismen; per Konstruktion gilt für  $v \in V$  ja immer

$$v = \text{pr}_P(v) + \varphi_V(\text{pr}_P(v))$$

Die  $U_Q$  können auch als Bündelkarten erhalten: Es sind

$$V_k(\mathbb{R}^n)|_{U_Q} \longrightarrow U_Q \times V_k(P), \quad (v_1, \dots, v_k) \mapsto (\langle v_1, \dots, v_k \rangle, \text{pr}_P(v_1), \dots, \text{pr}_P(v_k))$$

und

$$U_Q \times V_k(P) \longrightarrow V_k(\mathbb{R}^n)|_{U_Q}, \quad (V, p_1, \dots, p_k) \mapsto (p_1 + \varphi_V(p_1), \dots, p_k + \varphi_V(p_k))$$

inverse Homöomorphismen, welche offenbar mit den Fußpunktabbildungen kommutieren. Und eine Basis  $b_1, \dots, b_k$  von  $P$  liefert einen Homöomorphismus  $V_k(P) \rightarrow V_k(\mathbb{R}^k) = \text{GL}_k(\mathbb{R})$ .

- (2) Erlaubt man hier nur  $Q = P^\perp$ , so liefern obige Formeln (nach normieren) auch einen Bündelatlas für die Projektion  $V_k^O(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$  mit typischer Faser  $O(n)$ .  
 (3) Ganz eng verwandt ist auch noch das *tautologische Vektorbündel* über der Grassmann'schen

$$\gamma_{k,n} := \{(v, V) \in \mathbb{R}^n \times \text{Gr}_k(\mathbb{R}^n) \mid v \in V\}$$

mit Projektion

$$\gamma_{k,n} \longrightarrow \text{Gr}_k(\mathbb{R}^n), \quad (V, v) \mapsto V$$

Addition

$$\gamma_{k,n} \times_{\text{Gr}_k(\mathbb{R}^n)} \gamma_{k,n} \longrightarrow \gamma_{k,n}, \quad (V, v, V, w) \mapsto (V, v + w)$$

und Skalarmultiplikation

$$\mathbb{R} \times \gamma_{k,n} \longrightarrow \gamma_{k,n}, \quad (t, V, v) \mapsto (V, tv),$$

alles offenbar stetig. Und es gilt

$$(\gamma_{k,n})_V = \{V\} \times V,$$

(darum heißt das Bündel ja tautologisch!), was obige Addition und Skalarmultiplikation in die von  $V$  übersetzt. Bleibt noch die lokale Trivialität zu zeigen, und es sind

$$(\gamma_{k,n})|_{U_Q} \longrightarrow U_Q \times P, \quad (V, v) \mapsto (V, \text{pr}_P(v))$$

und

$$U_Q \times P \longrightarrow (\gamma_{k,n})|_U, \quad (V, p) \mapsto (V, \varphi_V(p))$$

inverse Homöomorphismen und offenbar faserweise linear. Wählen wir noch eine Basis  $b_1, \dots, b_k$  in von  $P$  sehen wir, dass die typische Faser  $\mathbb{R}^k$  ist, insbesondere ist  $\gamma_{k,n}$  ein  $k$ -dimensionales Vektorbündel.

- (4) Ganz analoge Aussagen erhalten wir im komplexen Fall:  $V_k(\mathbb{C}^n) \rightarrow \text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$  ist ein Faserbündel mit typischer Faser  $\text{GL}_k(\mathbb{C})$  (das gilt sogar für einen beliebigen topologischen Körper),  $V_k^U(\mathbb{C}^n) \rightarrow \text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$  ist eines mit typischer Faser  $U(n)$  und  $\gamma_{k,n}^{\mathbb{C}} \rightarrow \text{Gr}_k(\mathbb{C})$  ist ein  $k$ -dimensionales komplexes Vektorbündel (und damit insbesondere ein  $2n$ -dimensionales reelles).

- (5) Spezialisieren wir diese Bündel einmal etwas herunter: Für  $k = 1$  haben wir ja  $V_k(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  und  $V_k^O(\mathbb{R}^{n+1}) = S^n$  und erhalten also, dass

$$\pi: \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n \quad \text{und} \quad \pi: S^n \longrightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$$

Faserbündel mit typischer Faser  $GL_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  beziehungsweise  $O(1) = \{\pm 1\}$  sind. Für die Standardkarten  $U_i = \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{R}\mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0\}$  sind die obigen Karten, dann im linken Fall einfach durch

$$\{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \neq 0\} \longrightarrow U_i \times \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (x_0, \dots, x_n) \longmapsto ([x_0, \dots, x_n], x_i)$$

und im rechten durch

$$\{(x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid x_i \neq 0\} \longrightarrow U_i \times \{\pm 1\}, \quad (x_0, \dots, x_n) \longmapsto ([x_0, \dots, x_n], \frac{x_i}{|x_i|})$$

gegeben sind. Und wir beobachten auch noch, dass die Einschränkung von  $\gamma_{1,n+1} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$  auf das Komplement des Nullschnitts genau das linke dieser Bündel liefert, i.e. wir haben eine Bündelabbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} & \xrightarrow{v \mapsto (\mathbb{R}v, v)} & \gamma_{1,n+1} \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi \\ & \mathbb{R}\mathbb{P}^n & \end{array}$$

welche ein Homöomorphismus auf  $\gamma_{1,n+1} \setminus n(\mathbb{R}\mathbb{P}^n)$  ist (die Umkehrabbildung ist  $(V, v) \mapsto v$ ).

- (6) Setzen wir auch noch  $n = 1$ , erhalten wir mittels des Homöomorphismus  $\mathbb{R}\mathbb{P}^1 \rightarrow S^1, [z] \mapsto \frac{z^2}{|z|^2}$ , dass

$$\mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow S^1, \quad z \longmapsto \frac{z^2}{|z|^2}$$

ein Faserbündel mit typischer Faser  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  und

$$S^1 \longrightarrow S^1, \quad x \longmapsto x^2$$

eins mit typischer Faser  $\{\pm 1\}$ . Die Karten von oben werden im letzten Falle einfach zu

$$S^1 \setminus \{\pm i\} \longrightarrow (S^1 \setminus \{-1\}) \times \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad z \mapsto (z^2, \operatorname{Re}(z))$$

$$S^1 \setminus \{\pm 1\} \longrightarrow (S^1 \setminus \{1\}) \times \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad z \mapsto (z^2, \operatorname{Im}(z))$$

Und es ist eine Aufgabe zu zeigen, dass das Vektorbündel  $\gamma_{1,2} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^1$  zum berühmten Möbiusband über  $S^1$  homöomorph ist.

- (7) Im komplexen Fall erhält man bei  $k = 1$  Faserbündel

$$\pi: \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n \quad \text{und} \quad \pi: S^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$$

mit typischer Faser  $GL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  und  $U(1) = S^1$  und für  $n = 1$  die berühmte Hopf-Faserung

$$\eta: S^3 \longrightarrow S^2$$

vermöge des Homöomorphismus  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \rightarrow S^2$  aus den Übungen. Eine Illustration von ihr schmückt zum Beispiel das Titelbild von Hatcher's Lehrbuch "Algebraic Topology".

Es ist wie gesagt nicht einfach zu entscheiden welche dieser Bündel nicht-trivial sind. Bisher haben wir nur die Werkzeuge um dies für Bündel mit 0- und 1-dimensionaler Faser zu tun. Fangen wir einmal mit dem zweiten Fall an. Ich erinnere noch an daran, dass eine stetige Abbildung  $\sigma: B \rightarrow E$  ein *Schnitt* von  $\pi: E \rightarrow B$  heißt, wenn  $\pi \circ \sigma = \operatorname{id}_B$  gilt. Die Menge der Schnitte wird meist mit  $\Gamma(\pi)$  bezeichnet.

**4.6. Satz** *Ein Faserbündel  $\pi: E \rightarrow B$  mit typischer Faser  $\mathbb{R}$  über einem zusammenhängenden Raum  $B$  ist nicht-trivial sobald es einen Schnitt  $\sigma: B \rightarrow E$  von  $\pi$  derart gibt, dass  $E \setminus \sigma(B)$  immer noch zusammenhängt.*

PROOF. Im trivialen Bündel  $\text{pr}_1: B \times \mathbb{R} \rightarrow B$  hat ein Schnitt  $s$  immer die Form  $b \mapsto (b, g(b))$  für eine stetige Abbildung  $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ . Aber dann ist

$$(B \times \mathbb{R}) \setminus s(B) \longrightarrow B \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}), \quad (b, t) \longmapsto (b, t - g(b))$$

ein Homöomorphismus (mit Umkehrabbildung  $(b, t) \mapsto (b, t + g(b))$ ) und die rechte Seite hängt offenbar nicht zusammen.  $\square$

Da wir in 4.5 einen Homöomorphismus  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \gamma_{1,n+1} \setminus n(\mathbb{R}\mathbb{P}^n)$  konstruiert haben, erhalten wir insbesondere:

**4.7. Korollar** Die Bündel  $\gamma_{1,n+1} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$  sind für  $n > 0$  allesamt nicht trivial. Insbesondere gilt das für das Möbiusband über  $S^1$ .

Ein Wort der Warnung: Wir haben hier nicht gezeigt, dass  $\gamma_{1,n+1}$  nicht homöomorph zu  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n \times \mathbb{R}$  ist, nur dass es keinen Homöomorphismus gibt, der auch noch mit den Projektionen auf  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  funktioniert. Das stimmt auch, bedarf aber etwas mehr Maschinerie.

Im Kontrast dazu haben wir aber:

**4.8. Beispiel** (1) Das Tangentialbündel von  $S^1$  ist trivial: Die Abbildungen

$$S^1 \times \mathbb{R} \longrightarrow \text{TS}^1, \quad (z, t) \longmapsto (z, itz)$$

und

$$\text{TS}^1 \longrightarrow S^1 \times \mathbb{R}, \quad (z, v) \longmapsto (z, -i\bar{z}v)$$

sind inverse, fasernweise lineare Bündelabbildungen.

(2) Ähnlich gilt für  $S^3$  indem man die Quaternionen  $\mathbb{H}$  benutzt: Es ist

$$S^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \text{TS}^3, \quad (z, t_1, t_2, t_3) \longmapsto (z, it_1z + jt_2z + kt_3z)$$

eine fasernweise lineare und injektive Bündelabbildung, und da beide Seiten dreidimensionale Fasern haben ist sie auch bijektiv (man kann auch die Homöomorphie so leicht nachweisen), und

$$\text{TS}^3 \longrightarrow S^3 \times \mathbb{R}^3, \quad (z, v) \longmapsto (z, \text{Re}(-i\bar{z}v), \text{Re}(-j\bar{z}v), \text{Re}(-k\bar{z}v))$$

ist eine Inverse.

Etwas einfacher ist es hier  $\mathbb{R} = \text{Im}(\mathbb{C})$  und  $\mathbb{R}^3 = \text{Im}(\mathbb{H})$  zu benutzen, dann sehen diese Abbildungen uniform durch  $(z, t) \mapsto (z, tz)$  und  $(z, v) \mapsto (z, \bar{z}v)$  gegeben.

Ein Ziel des letzten Kapitels dieser Vorlesung ist es Methoden zu entwickeln mit denen man die Trivialität zweidimensionaler Bündel testen kann und insbesondere zu zeigen, dass das Tangentialbündel von  $S^2$  nicht trivial ist.

Nun aber erst einmal in eine Dimension niedriger, wo Bündel einen andere Namen haben:

**4.9. Definition** Eine lokal triviale Abbildung  $\pi: E \rightarrow B$  mit diskreten Fasern heißt eine *Überlagerung*. Ist sie ein Faserbündel mit typischer Faser  $F$  einem endlichen Raum, so heißt  $|F|$  die *Blätterzahl* von  $\pi$  (und bei unendlichem  $F$  sagen wir einfach, dass die Blätterzahl unendlich ist).

Wir haben also oben gesehen, dass

$$S^n \longrightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n \quad \text{und insbesondere} \quad (-)^2: S^1 \longrightarrow S^1$$

jeweils zweiblättrige Überlagerungen sind. Hier sind zwei weitere Beispiele von ähnlicher Natur wie das rechte:

**4.10. Beispiel** (1) Die Abbildung

$$\mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad z \longmapsto z^n$$

und daher auch ihre Einschränkung

$$S^1 \longrightarrow S^1, \quad z \longmapsto z^n$$

sind  $n$ -blättrige Überlagerungen für jedes  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Das wird eine Übung sein.

(2) Die Exponentialabbildung

$$\exp: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

und daher auch ihre Einschränkung auf die imaginäre Achse, welche nach Euler's magischer Formel  $\exp(it) = \cos(t) + i \sin(t)$  einfach durch

$$(\cos, \sin): \mathbb{R} \longrightarrow S^1$$

gegeben ist, sind unendlich blättrige Überlagerung, ihre typische Faser ist  $\mathbb{Z}$ : Für die lokalen Trivialisierung, wähle  $x \in S^1$ . Im zweiten Fall haben wir dann

$$(\cos, \sin)^{-1}(S^1 \setminus \{x\}) = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} y + 2\pi n = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} ]y + 2\pi n, y + 2\pi(n+1)[$$

für ein  $y \in \mathbb{R}$  mit  $(\cos(y), \sin(y)) = x$

$$\begin{array}{ccc} (\cos, \sin)^{-1}(S^1 \setminus \{x\}) & \xrightarrow{(\cos, \sin, z \mapsto \lfloor \frac{z-y}{2\pi} \rfloor)} & S^1 \setminus \{x\} \times \mathbb{Z} \\ & \searrow (\cos, \sin) & \swarrow \text{pr}_1 \\ & S^1 \setminus \{x\} & \end{array}$$

Bleibt noch zu prüfen, dass die horizontale Abbildung ein Homöomorphismus ist. Aber das ist einfach die Aussage, dass

$$(\cos, \sin, n): ]y + 2\pi n, y + 2\pi(n+1)[ \rightarrow S^1 \setminus \{x\} \times \{n\}$$

für jedes  $n \in \mathbb{Z}$  ein Homöomorphismus ist.

Im Falle der Exponentialabbildung setzen wir

$$S_x = \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot x)$$

Dann gilt wegen Euler'schen Formel  $\exp(r + it) = e^r \cdot (\cos(t) + i \sin(t))$

$$\begin{aligned} \exp^{-1}(S_x) &= \mathbb{C} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (y + 2\pi ni) + \mathbb{R} \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(y) + 2\pi n < \text{Im}(z) < \text{Im}(y) + 2\pi(n+1)\} \end{aligned}$$

für ein beliebiges  $y \in \mathbb{C}$  mit  $\exp(x) = y$ . Insbesondere erhalten wir also eine stetige (sogar lokal konstante) Abbildung

$$h: \exp^{-1}(S_x) \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad z \longmapsto \left\lfloor \frac{\text{Im}(z - y)}{2\pi} \right\rfloor,$$

und damit ist die gesuchte Bündelkarte

$$\begin{array}{ccc} \exp^{-1}(S_x) & \xrightarrow{(\exp, h)} & S_x \times \mathbb{Z} \\ & \searrow \text{exp} & \swarrow \text{pr}_1 \\ & S_x & \end{array}$$

Wie müssen wieder nachweisen, dass die horizontale Abbildung ein Homöomorphismus ist. Wer ein bisschen Funktionentheorie beherrscht, wird wissen, dass die Umkehrabbildung genau durch einen Zweig des komplexen Logarithmus gegeben ist, welcher auf jedem der Schlitzgebiete  $S_x$  nunmal existiert.

Ansonsten benutze die Euler'sche Formel um zu sehen, dass jedes

$$(\exp, n): \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(y) + 2\pi n < \text{Im}(z) < \text{Im}(y) + 2\pi(n+1)\} \longrightarrow S_x \times \{n\}$$

bijektiv ist und  $\exp$  aufgefasst als Abbildung  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  glatt ist, mit

$$D_{(r,t)}(\exp) = \begin{pmatrix} e^r \cos(t) & e^r - \sin(t) \\ e^r \sin(t) & e^r \cos(t) \end{pmatrix}$$

gilt. Diese Matrix ist für alle  $(r, t) \in \mathbb{R}^2$  invertierbar (ihre Determinante ist  $e^r$ ), sodass der Satz über die Umkehrfunktion sofort liefert, dass  $\exp$  auch eine offene Abbildung ist, und damit die Umkehrabbildung (von der Einschränkung die wir oben betrachtet haben) stetig.

Alle diese Beispiele von Überlagerungen sind nicht trivial:

**4.11. Satz** *Es sei  $\pi: E \rightarrow B$  eine Überlagerung zwischen zusammenhängenden topologischen Räumen. Dann ist entweder  $\pi$  ein Homöomorphismus oder  $\pi$  besitzt keinen stetigen Schnitt. Insbesondere ist  $\pi$  nicht trivial, sobald  $\pi$  mehr als einblättrig ist.*

PROOF. In den Übungen werden Sie zeigen, dass ein Schnitt  $\sigma$  einer lokal trivialen Abbildung automatisch eine abgeschlossene Abbildung ist, wenn die Fasern Hausdorff'sch sind. Für Überlagerungen sind sie aber auch offen: Ist  $(U, \varphi)$  eine lokale Trivialisierung von  $\pi$ , also

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times \pi^{-1}(b) \\ & \searrow \pi & \swarrow \text{pr}_1 \\ & U & \end{array}$$

Dann ist natürlich auch

$$U \xrightarrow{\sigma} \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\varphi} U \times \pi^{-1}(b) \xrightarrow{\text{pr}_1} \pi^{-1}(b)$$

stetig. Aber weil das Ziel ein diskreter Raum ist, ist das Urbild  $U_x$  für jedes  $x \in \pi^{-1}(b)$  offen und wir haben  $U = \bigcup_{x \in \pi^{-1}(b)} U_x$ . Aber dann ist  $\varphi(\sigma(U_x)) = U_x \times \{x\} \subseteq U \times \pi^{-1}(b)$  natürlich ebenfalls offen und damit auch

$$\varphi(\sigma(U)) = \bigcup_{x \in \pi^{-1}(b)} U_x \times \{x\}$$

und damit weil  $\varphi$  ein Homöomorphismus ist auch  $\sigma(U) \subseteq \pi^{-1}(U) \subseteq E$ . Und weil sich  $B$  durch lokale Trivialisierungen überdecken lässt, folgt, dass auch  $\text{im}(\sigma) \subseteq E$  offen ist.

Aber da  $E$  zusammenhängt, muss dass  $\text{im}(\sigma)$  entweder leer sein und damit  $B$  (und dann auch  $E$ ) leer, oder  $\sigma$  ist surjektiv. Aber als Schnitt ist  $\sigma$  ohnehin injektiv, damit bijektiv und damit ein Homöomorphismus mit Umkehrabbildung  $\pi$ , die dann auch ein Homöomorphismus ist.

Und für den Zusatz beobachten wir nun noch, dass die Projektion  $B \times F \rightarrow B$  immer stetige Schnitte besitzt sobald  $F$  nicht leer ist.  $\square$

Wir sehen damit eins der fundamentalen Probleme, mit denen man sich im Zuge der komplexen Analysis herumschlagen muss:

**4.12. Korollar** *Für  $n > 1$  gibt es keine stetige Funktion  $w: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $w^n = \text{id}$ , also keine stetige  $n$ -te Wurzelfunktion, und auch keine stetige Funktion  $l: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\exp \circ l = \text{id}$ , also keinen stetigen Logarithmus.*

Noch eine sehr nützliche Klasse von Überlagerungen ist durch folgende Beobachtung gegeben. Hierfür nennen wir eine stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  *eigentlich*, wenn Urbilder kompakter Teilmengen von  $Y$  wieder kompakt in  $X$  sind.

**4.13. Satz** *Sind  $M$  und  $N$   $C^1$ -Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension,  $f: M \rightarrow N$  stetig differenzierbar und  $A \subseteq N$  die Menge der singulären Werte von  $f$  (also  $y \in A$  genau dann, wenn ein  $x \in f^{-1}(y)$  existiert derart, dass  $D_x f: T_x M \rightarrow T_y N$  kein Isomorphismus ist).*

*Ist dann  $f$  proper, so ist  $f: M \setminus f^{-1}(A) \rightarrow N \setminus A$  eine Überlagerung.*

Da die Fasern diskret sind und wegen der Eigentlichkeit von  $f$  kompakt, sind sie alle endlich, es ist  $f: M \setminus f^{-1}(A) \rightarrow N \setminus A$  also ein endlichblättrige Überlagerung, wenn  $N \setminus A$  auch noch zusammenhängt. Die Blätterzahl heißt in diesem Falle meist der *Grad* von  $f$ , weil das schön mit dem nächsten Beispiel zusammenpasst: Wir erhalten hieraus nämlich insbesondere den Fundamentalsatz der Algebra:

**4.14. Korollar** *Ist  $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine polynomielle Funktion ohne Nullstellen so ist  $F$  konstant.*

PROOF. Zeigen wir zuerst einmal die Eigentlichkeit:

Für ein Polynom  $|F(z)| \rightarrow \infty$  gilt  $|z| \rightarrow \infty$  bei: Hat  $F$  Grad  $n$  so haben wir nämlich

$$\frac{F(z)}{F_n z^n} = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{F_i}{F_i z^{n-i}}$$

und bei  $|z| \rightarrow \infty$  konvergiert die rechte Seite offenbar gegen 1, also tut das auch die linke und dann muss weil  $|z^n| \rightarrow \infty$  eben auch  $|F(z)| \rightarrow \infty$  gelten.

Aber das heißt, dass für beschränktes  $K \subseteq \mathbb{C}$  auch  $f^{-1}(K) \subseteq \mathbb{C}$  beschränkt ist, was mittels des Satzes von Heine-Borel die Eigentlichkeit von  $F$  liefert.

Und das Differential  $D_z F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  wird (man inspiziere einfach die Definition) durch Multiplikation mit dem komplexen Zahl  $F'(z)$  gegeben. Insbesondere, ist es entweder invertierbar oder verschwindet, und letzteres tut es eben genau bei den Nullstellen von  $F'$ . Nennen wir diese Menge  $N$ , so ist also  $F(N)$  die Menge der singulären von  $F$  und wir lernen aus dem vorigen Satz, dass

$$F: \mathbb{C} \setminus F^{-1}(F(N)) \longrightarrow \mathbb{C} \setminus F(N)$$

eine Überlagerung ist. Aber wenn  $F$  nicht konstant ist, ist  $N$  endlich und dann natürlich auch  $F(N)$  endlich, und weil jedes Polynom nur endlich viele Nullstellen hat, dann auch  $F^{-1}(F(N))$  (weil  $F^{-1}(x)$  ja einfach aus den Nullstellen von  $F - x$  besteht).

Aber dann hängen sowohl  $\mathbb{C} \setminus F^{-1}(F(N))$  als auch  $\mathbb{C} \setminus F(N)$  zusammen, und damit ist gemäß einer Übungsaufgabe die Funktion

$$\mathbb{C} \setminus F(N) \longrightarrow \mathbb{N}, \quad z \mapsto |F^{-1}(z)|$$

konstant.

Sicherlich kann sie aber nicht überall den Wert 0 haben, irgendwohin müssen die Punkte aus  $\mathbb{C} \setminus F^{-1}(F(N))$  ja abbilden. Aber damit liegt  $\mathbb{C} \setminus F(N)$  im Bild von  $F$  und da  $F(N)$  das per Konstruktion ebenfalls ist, ist  $F$  surjektiv und trifft damit insbesondere 0.  $\square$

Für den Beweis von 4.13 bedürfen wir noch eines einfachen Lemmas über eigentliche Abbildungen:

**4.15. Lemma** *Es sei  $f: X \rightarrow Y$  stetig und  $Y$  kompakt erzeugt und Hausdorffsch, das heißt eine Teilmenge von  $Y$  ist abgeschlossen genau dann, wenn ihr Schnitt mit jeder kompakten Teilmenge von  $Y$  abgeschlossen ist. Ist dann  $f$  eigentlich, so ist  $f$  abgeschlossen.*

Es wird eine Aufgabe sein zu zeigen, dass jede Mannigfaltigkeit in diesem Sinne kompakt erzeugt ist.

PROOF.  $\square$

BEWEIS VON 4.13. Sei  $y \in N \setminus A$ . Nach dem Satz über Umkehrfunktionen 3.21 gibt es um jeden Punkt  $x \in f^{-1}(y)$  dann eine Umgebung  $x \in U \subseteq M$ , sodass die Einschränkung  $f: U \rightarrow f(U)$  ein Homöomorphismus (sogar Diffeomorphismus) auf eine offene Teilmenge  $f(U) \subseteq N$  ist. Insbesondere gibt es in dieser Umgebung keinen weiteren Punkt, der auf  $y$  abgebildet wird. Mit anderen Worten  $f^{-1}(y) \cap U = \{x\}$ . Das sagt uns dass  $f^{-1}(y) \subseteq M$  diskret ist, und daher wegen der Eigentlichkeit von  $f$  endlich.

Nun zur lokalen Trivialität: Es seien  $x_1, \dots, x_n$  die Urbilder von  $y$  und  $x_i \in U_i \subseteq M$  Umgebungen wie auf denen  $f$  zu einem Homöomorphismus restringiert. Indem wir die  $U_i$  falls nötig verkleinern können wir sicherlich erreichen, dass sie alle disjunkt zu einander sind (Mannigfaltigkeit sind ja hausdorff'sch!). Setze dann

$$V = \bigcap_{i=1}^n f(U_i) \setminus f \left( M \setminus \bigcup_{i=1}^n U_i \right) \subseteq N;$$

die Menge  $\bigcap_{i=1}^n f(U_i)$  ist natürlich als endlicher Schnitt von endlichen Mengen offen und  $M \setminus \bigcup_{i=1}^n U_i$  ist abgeschlossen. Und da  $f$  nach dem vorigen Lemma abgeschlossen ist, ist  $V$  dann offen. Der

Punkt ist, dass nun

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(V) \cap U_i$$

gilt: Offenbar ist die rechte Seite in der linken enthalten, und für ein  $x \in M$  mit  $f(x) \in V$  gilt per Definition  $f(x) \notin f(M \setminus \bigcup_{i=1}^n U_i)$ , und damit muss also  $x \in \bigcup_{i=1}^n U_i$  gelten, so dass  $x$  in einem der Terme der rechten Seite enthalten ist. Aber da die  $U_i$  disjunkt sind ist, die Abbildung  $\bigcup_{i=1}^n f^{-1}(V) \cap U_i \rightarrow V \times \{1, \dots, k\}$ , die auf  $f^{-1}(V) \cap U_i$  durch  $x \mapsto (f(x), i)$  gegeben ist ein Homöomorphismus, wie gewünscht.  $\square$