Aufgabe 1

Geben Sie einen mögichst direkten Beweis des Rangsatzes. Er besagt:

Theorem. *Seien V und W endlich dimensionale Vektorräume über einem Körper K und $\varphi\colon V \to W$ K-linear. Dann gibt es nummerierte K-Basen B von V und C von W derart, dass*

$$\mathrm{M}(\varphi, B, C)_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \leq \mathrm{rk}(\varphi) \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

für die Darstellungsmatrix $\mathrm{M}(\varphi, B, C)$ *gilt.*

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2, 2, K)$$

für einen Körper K und $a, b \in K$ genau dann diagonalisierbar ist, wenn $b = 0$.

b) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2, 2, K)$$

für einen Körper K und $a, b, c \in K$ mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$ und $b \cdot c \neq 0$ genau dann diagonalisierbar ist, wenn $b \cdot c$ in K eine Quadratwurzel besitzt.

c) Was passiert in b), wenn $\mathrm{char}(K) = 2$?

Aufgabe 3

Entscheiden Sie, ob

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4, 4, \mathbb{Q})$$

diagonalisierbar ist.

Aufgabe 4

Zeigen sie, dass die Eigenvektoren der ($\mathbb{R}$-linearen) Ableitungsfunktion

$$(-)'\colon \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$$

genau die Funktionen $t \mapsto \mu \cdot e^{\lambda \cdot t}$ für $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ mit $\mu \neq 0$ sind.