Aufgabe 1 (5 Punkte)

Ist V ein Vektorraum über einem Körper K, $\varphi\colon V \to V$ K-linear und $U \subseteq V$ eine Teilmenge mit

1. $0 \notin U$
2. jedes $v \in U$ ist ein Eigenvektor von φ, und
3. zwei Elemente $v, v' \in U$ sind nur dann Eigenvektoren zum gleichen Eigenwert, wenn $v = v'$ gilt.

Zeigen Sie, dass U linear unabhängig ist.

Hinweis: Betrachten sie zunächst den Fall, dass U endlich ist, etwa per Induktion über $|U| \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass je zwei ähnliche quadratische Matrizen über einem Körper die selben Eigenwerte haben.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Entscheiden Sie, ob

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & -4 \\ -3 & 7 & 7 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3,3,\mathbb{Q})$$

diagonalisierbar ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für $p \in \mathbb{N}$ prim und $1 \leq k \leq p-1$ die Teilbarkeit $p \mid \binom{p}{k}$ gilt.

b) Folgern Sie, dass für jeden Ring R mit $p \cdot 1 = 0 \in R$ (etwa R ein Körper der Charakteristik p), die Abbildung

$$\mathrm{Frob}_p\colon R \longrightarrow R, \quad x \longmapsto x^p$$

ein Ringhomomorphismus ist; er heißt der *Frobenius-Endomorphismus* von R.

c) Folgern Sie auch, dass für $R = \mathbb{Z}/p$ einfach $\mathrm{Frob}_p = \mathrm{id}$ gilt. Insbesondere ist die polynomielle Funktion

$$\mathbb{Z}/p \longrightarrow \mathbb{Z}/p, \quad t \longmapsto t^p - t$$

konstant mit Wert 0.

Zur Erinnerung: Es ist

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \in \mathbb{N}$$

die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge und in jedem kommutativen Ring R gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

für $x, y \in R$ und $n \in \mathbb{N}$ nach dem binomischen Lehrsatz aus der Analysis I.