Aufgabe 1 (5 Punkte)

Es sei $\psi: M \times M \to R$ eine R-bilineare Abbildung, wo R ein kommutativer Ring ist, und M ein R-Modul. Zeigen Sie für jeden R-Untermodul $U \subseteq M$:

a) Es gelten
$$U \cap U_\psi^\perp = \mathrm{Ker}\big((\psi_{|U\times U})_\sharp : U \to \mathrm{Lin}_R(U,R)\big)$$
und
$$U + U_\psi^\perp = \{m \in M \mid \exists u \in U : \psi_\sharp(m)_{|U} = (\psi_{|U\times U})_\sharp(u)\}.$$

b) Ist die Einschränkung $\psi_{|U\times U}$ unimodular (also obige Abbildung bijektiv), so gilt $M = U \oplus U_\psi^\perp$.

c) In der Vorlesung hatte ich in b) Äquivalenz behauptet (aber zum Glück nirgends benutzt). Finden Sie ein Gegenbeispiel hierzu.

Lösungsvorschlag. a) Zur ersten Aussage: Es gilt $u \in U \cap U^\perp$ genau dann, wenn $u \in U$ und $\psi(u,v) = 0$ für alle $v inU$. Aber $\psi(u,v) = (\psi_\sharp(u))(v)$, sodass sich dies genau zu $\psi_\sharp(u)_{|U} = 0$ übersetzt. Und da per Definition $(\psi_{|U\times U})_\sharp(u) = \psi_\sharp(u)_{|U}$ besagt das wiederum genau $u \in \mathrm{Ker}\big((\psi_{|U\times U})_\sharp : U \to \mathrm{Lin}_R(U,R)\big)$.

Zur zweiten Aussage: Sei etwa $m = u + n$ mit $u \in U$ und $\psi(n,v) = 0$ für alle $v \in U$. Dann gilt $\psi(m,v) = \psi(u,v) + \psi(n,v) = \psi(u,v)$ für alle $v \in U$ und damit $\psi_\sharp(m)_{|U} = \psi_\sharp(u)_{|U} = (\psi_{|U\times U})_\sharp(u)$.

Gilt andersherum $\psi_\sharp(m)_{|U} = (\psi_{|U\times U})_\sharp(u)$ für ein $u \in U$ so haben wir $m = u + (m-u)$ und $\psi(m-u,v) = \psi(m,v) - \psi(u,v) = (\psi_\sharp(m)_{|U})(v) - (\psi_\sharp(u))_{|U})(v) = 0$ für alle $v \in U$, also $m - u \in U^\perp$.

b) Für $\psi_{|U\times U}$ unimodular ist (per Definition) $(\psi_{|U\times U})_\sharp : U \to \mathrm{Lin}_R(U,R)$ bijektiv. Also folgt aus a) $U \cap U^\perp = \{0\}$ (wegen Injektivität) und $U + U^\perp = M$ (wegen Surjektivität).

c) Für ein Vielfaches $r \cdot \psi$ einer auf U unimodularen Form ψ, erhält man aus obigen Überlegungen immer noch $M = U \oplus U^\perp$. Aber diese ist nur dann offensichtlich selbst unimodular auf U wenn r eine Einheit ist. Das wohl einfachste Gegenbeispiel ist
$$\psi: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad (x,y) \longmapsto 2xy$$
mit $U = \mathbb{Z}$. Es gilt dann
$$\psi_\sharp : \mathbb{Z} \to \mathrm{Lin}_\mathbb{Z}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}), \quad n \longmapsto 2n \cdot \mathrm{id}$$
was offenbar die Identität nicht erwischt, aber trotzdem $U^\perp = 0$.

□

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Zeigen Sie,

a) dass $-1, 1 \in \mathbb{R}$ die einzigen (potentiellen) reellen Eigenwerte einer orthogonalen Matrix $A \in \mathrm{O}(n)$ sind

und folgern Sie,

b) dass jedes Element $A \in \mathrm{SO}(3)$ eine Rotation ist.

Lösungsvorschlag. a) Ist v ein nicht-trivialer Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$, so haben wir
$$|\lambda| \cdot |v| = |\lambda \cdot v| = |A \cdot v| = |v|$$
und damit weil $|v| \neq 0$ schon $|\lambda| = 1$, also $\lambda = \pm 1$.

b) Da χ_A ein Polynom vom Grad 3 ist, besitzt es eine reelle Nullstelle nach dem Zwischenwertsatz, und demzufolge A einen reellen Eigenwert ϵ, nach a) entweder 1 oder -1. Ist $0 \neq v \in \mathbb{R}^3$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert ϵ, so gilt für $w \in \{v\}^\perp$

$$\langle A \cdot w, v\rangle = \epsilon\langle A \cdot w, \epsilon \cdot v\rangle = \epsilon\langle A \cdot w, A \cdot v\rangle = \epsilon\langle w, v\rangle = 0$$

und damit $A \cdot w \in \{v\}^\perp$. Es gilt also $A(\{v\}^\perp) \subseteq \{v\}^\perp$ und nach der ersten Aufgabe (oder auch Lemma 7.4.11 im Skript) gilt $\mathbb{R}^3 = \langle v\rangle \oplus \{v\}^\perp$ und damit ist $\{v\}^\perp$ zweidimensional. Nach Aufgabe 4 vom fünften Zettel gilt weiterhin $1 = \det(A) = \epsilon \cdot \det(A_{|\{v\}^\perp})$, also $\det(A_{|\{v\}^\perp}) = \epsilon$. Aber dann liefert für eine Orthonormalbasis b von $\{v\}^\perp$ die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathrm{L}_b} \{v\}^\perp \xrightarrow{A} \{v\}^\perp \xrightarrow{\mathrm{L}_b^{-1}} \mathbb{R}^2$$

welche durch $\mathrm{Mat}(A_{|\{v\}^\perp}, b, b)$ beschrieben ist, ein Element von O(2) und damit nach Beispiel 7.1.12 eine Rotationsmatrix für $\epsilon = 1$ oder eine Spiegelungsmatrix für $\epsilon = -1$. Im ersten Falle sind wir nach Definition von Rotationsmatrizen im $\mathbb{R}^3$ fertig, im zweiten lernen wir, da Spiegelungen (wieder nach 7.1.12) vermöge einer Orthonormalbasis p_1, p_2 von $\mathbb{R}^2$ zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ähnlich sind, dass A mittels der Orthonormalbasis $\mathrm{L}_b(p_1), v, \mathrm{L}_b(p_2)$ diagonalisierbar ist zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix beschreibt gerade eine Drehung um den Winkel π um die Achse $\mathrm{L}_b(p_1)$.

□

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3, 3, \mathbb{R})$$

positiv definit ist, und bestimmen Sie die Signatur von S.

Lösungsvorschlag. Wir folgen dem Algorithmus aus der Vorlesung bezüglich der Standardbasis e_1, e_2, e_3: Es gilt $\langle e_1, e_1\rangle_S = e_1^t \cdot S \cdot e_1 = 1$, und damit können wir $(1, 0, 0)$ als ersten Vektor einer Basis in der Sylvester'schen Normalform verwenden. Dann berechnen wir

$$e_2^{(2)} = \mathrm{pr}_{e_1^\perp}(e_2) = e_2 - e_1 \cdot \frac{\langle e_1, e_2\rangle_S}{\langle e_1, e_1\rangle_S} = (0, 1, 0)$$

$$e_3^{(2)} = \mathrm{pr}_{e_1^\perp}(e_3) = e_3 - e_1 \cdot \frac{\langle e_1, e_3\rangle_S}{\langle e_1, e_1\rangle_S} = (0, 0, 1) + (1, 0, 0) = (1, 0, 1)$$

und berechnen $\langle e_2^{(2)}, e_2^{(2)}\rangle_S = 2$. Wir können also $(0, 1, 0)$ als (noch nicht normierten) zweiten Basisvektor verwenden. Dann berechnen wir

$$e_3^{(3)} = \mathrm{pr}_{(e_2^{(2)})^\perp}(e_3^{(2)}) = e_3^{(2)} - e_2^{(2)} \cdot \frac{\langle e_2^{(2)}, e_3^{(2)}\rangle_S}{\langle e_2^{(2)}, e_2^{(2)}\rangle_S} = (1, 0, 1) - (0, 1, 0) \cdot \frac{1}{2} = (1, -1/2, 1)$$

und zum Schluss

$$\langle e_3^{(3)}, e_3^{(3)}\rangle_S = -1/2$$

Damit ist obige Matrix vermöge der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Gl}_3(\mathbb{R})$$

kongruent zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

und demzufolge nicht positiv definit mit Signatur 1. □

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass die beiden Matrizen

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

in $\mathrm{Mat}(3,3,R)$ für jeden kommutativen Ring R kongruent sind.

Lösungsvorschlag. Um ein B mit $B^t \cdot S \cdot B = D$ zu finden, folgen wir im wesentlichen dem Algorithmus im Satz von Jacobi bzw. dem Gram-Schmidt-Verfahren. Es bietet sich aber an diesmal zuerst einen Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ mit $\langle v, v\rangle_S = -1$ zu suchen (es gibt hiervon schließlich "weniger" als von denen mit $\langle v, v\rangle_S = 1$; andersherum funktioniert die Methode aber auch, nur mit etwas mehr Rechenaufwand). Wir berechnen einmal allgemein

$$\langle (a,b,c),(x,y,z)\rangle_S = ax + bz + cy \quad \text{und insbesondere} \quad |(a,b,c)|_S = a^2 + 2bc.$$

Wir brauchen also $(x,y,z) \in R^3$ mit $x^2 + 2yz = 1$. Scharfes Hinsehen liefert wegen $-1 = 1-2$, dass jedes Tripel mit $x^2 = 1$ und $yz = -1$ funktioniert, etwa erfüllt $b_3 = (1,-1,1) \in \mathbb{R}^3$ die Gleichung $|b_3| = -1$. Dann erhalten wir

$$(b_3)_S^\perp = \{(x,y,z) \in R^3 \mid x - z + y = 0\}.$$

Hierin suchen wir nun zwei S-orthogonale Vektoren der S-Länge 1. Aber obige Bedingung erzwingt $z = x + y$ und $|(x,y,x+y)|_S = x^2 + 2y(x+y)$. Offenbar können wir etwa $x = 1$ und $y = 0$ als Lösung wählen und erhalten, dass $b_2 = (1,0,1)$

$$\langle b_2, b_3\rangle_S = 0 \quad \text{und} \quad |b_2|_S = 1$$

erfüllt. Dann berechnen wir

$$(b_2)_S^\perp = \{(x,y,z) \in R^3 \mid x + y = 0\}.$$

Als dritten Basisvektor such wir also noch einen Vektor der S-Länge 1 in $b_2^\perp \cap b_3^\perp$. Aber aus den beiden Gleichungen für die orthogonalen Komplemente folgt sofort $y = -x$ und $z = 0$ und $|(x,-x,0)|_S = x^2$. Es erfüllt also $b_1 = (1,-1,0)$

$$\langle b_1, b_2\rangle_S = 0, \langle b_1, b_3\rangle_S = 0 \quad \text{und} \quad |b_1|_S = 1.$$

Die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

erfüllt also per Konstruktion $B^t \cdot S \cdot B = D$ und man berechnet $\det(B) = -1$, sodass B auch wirklich in jedem Ring R invertierbar ist. □