Aufgabe 1 (5 Punkte)

Es sei $\psi\colon M \times M \to R$ eine R-bilineare Abbildung, wo R ein kommutativer Ring ist, und M ein R-Modul. Zeigen Sie für jeden R-Untermodul $U \subseteq M$:

a) Es gelten
$$U \cap U_\psi^\perp = \operatorname{Ker}\big((\psi_{|U\times U})_\sharp\colon U \to \operatorname{Lin}_R(U,R)\big)$$
und
$$U + U_\psi^\perp = \{m \in M \mid \exists u \in U\colon \psi_\sharp(m)_{|U} = (\psi_{|U\times U})_\sharp(u)\}.$$

b) Ist die Einschränkung $\psi_{|U\times U}$ unimodular (also obige Abbildung bijektiv), so gilt $M = U \oplus U_\psi^\perp$.

c) In der Vorlesung hatte ich in b) Äquivalenz behauptet (aber zum Glück nirgends benutzt). Finden Sie ein Gegenbeispiel hierzu.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Zeigen Sie,

a) dass $-1, 1 \in \mathbb{R}$ die einzigen (potentiellen) reellen Eigenwerte einer orthogonalen Matrix $A \in \mathrm{O}(n)$ sind

und folgern Sie,

b) dass jedes Element $A \in \mathrm{SO}(3)$ eine Rotation ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die Matrix
$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3,3,\mathbb{R})$$
positiv definit ist, und bestimmen Sie die Signatur von S.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass die beiden Matrizen
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
in $\mathrm{Mat}(3,3,R)$ für jeden kommutativen Ring R kongruent sind.