Aufgabe 1 (5 Punkte)

Betrachten sie die Matrix
$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3,3,\mathbb{Z}/3)$$
und finden sie eine invertierbare Matrix $A \in \mathrm{Mat}(3,3,\mathbb{Z}/3)$ derart, dass $A^t \cdot S \cdot A$ Diagonalgestalt hat mit höchstens einem Eintrag ungleich $0, 1$ auf der Diagonale.

Lösungsskizze. Wir berechnen zuerst
$$\langle e_1, e_1 \rangle_S = 1,$$
sodass wir e_1 als ersten Basisvektor wählen können. Dann berechnen wir
$$e_2^{(2)} = e_2 - e_1 \cdot \frac{\langle e_1, e_2 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} = (0,1,0) - (1,0,0) \cdot 2 = (1,1,0)$$
$$e_3^{(2)} = e_3 - e_1 \cdot \frac{\langle e_1, e_3 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} = (0,0,1) - (1,0,0) \cdot 0 = (0,0,1)$$
und
$$\langle e_2^{(2)}, e_2^{(2)} \rangle_S = (1,1,0)^t \cdot S \cdot (1,1,0) = (1,1,0)^t \cdot (0,0,2) = 0$$
aber
$$\langle e_3^{(2)}, e_3^{(2)} \rangle_S = (0,0,1)^t \cdot S \cdot (0,0,1) = (0,0,1)^t \cdot (0,2,1) = 1$$
sodass wir nicht $e_2^{(2)}$, aber $e_3^{(2)} = (0,0,1)$ als zweiten Basisvektor benutzen können. Dann bilden wir noch
$$e_2^{(3)} = e_2^{(2)} - e_3^{(2)} \cdot \frac{\langle e_3^{(2)}, e_2^{(2)} \rangle}{\langle e_3^{(2)}, e_3^{(2)} \rangle} = (-2,1,0) - (0,0,1) \cdot 2 = (1,1,1)$$
und
$$\langle e_2^{(3)}, e_2^{(3)} \rangle_S = (1,1,1)^t \cdot S \cdot (1,1,1) = (1,1,1)^t \cdot (0,2,0) = 2$$
Damit erhalten wir
$$A^t \cdot S \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
was die gewünschte Form hat, für
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
□

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Zeigen Sie: Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum und $v \in \mathbb{R}^n$, so existiert ein eindeutiges Element $w \in U$ mit
$$|v - w| = \min\{r \in \mathbb{R} \mid \exists u \in U : r = |v - u|\}$$
und es gilt $w = \mathrm{pr}_U(v)$.

Mit anderen Worten, die Orthogonalprojektion von v auf U liefert das eindeutige Element von U, das den kleinsten Abstand zu v hat.

Lösungsskizze. Wegen $V = U \oplus U^\perp$ können wir auf eindeutige Weise $v = w + p$ schreiben mit $w \in U$ und $p \in U^\perp$ (per Definition also $w = \mathrm{pr}_U(v)$). Ist dann $u \in U$ beliebig, so rechnen wir

$$|v-u|^2 = |w+p-u|^2 = \langle w+p-u, w+p-u\rangle = \langle w-u, w-u\rangle + 2\langle p, w-u\rangle + \langle p,p\rangle = |w-u|^2 + |p|^2$$

da ja p und $w-u$ orthogonal zueinander sind. Aber der Wert rechts ist immer mindestend $|p|^2$ und nur dann gleich $|p|^2$, falls $|w-u| = 0$, also $w = u$ gilt. Es ist also $u = w$ der eindeutige Vektor mit minimalem $|v-u|$ wie gewünscht. □

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Zeigen Sie:

a) Für je zwei $v, w \in \mathbb{R}^n$ mit $|v| = |w|$ und $v \neq w$ existiert ein $(n-1)$-dimensionaler Untervektorraum $U \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\mathrm{S}_U(v) = w$.

b) Jedes Element $A \in \mathrm{O}(n)$ lässt sich als Produkt von höchstens n Spiegelungen an $(n-1)$-dimensionalen Unterräumen von $\mathbb{R}^n$ schreiben.

Hinweis: Imitieren Sie für b) den Beweis, dass jede Permutation ein Produkt von Transpositionen ist.

Lösungsskizze. a) In der ursprünglichen Aufgabenstellung fehlte die Annahme, dass $v \neq w$; der Fall $n = 1$ mit $v = 1 = w$ zeigen, dass diese aber natürlich notwendig ist. Dann nehme man jedenfalls $U = (v-w)^\perp$. Dann gilt (etwa nach 7.3.12 und 7.4.4)

$$s_U(x) = x - 2(v-w)\cdot\frac{\langle x, v-w\rangle}{\langle v-w, v-w\rangle}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und damit

$$s_U(v) = v - 2(v-w)\cdot\frac{\langle v, v-w\rangle}{\langle v-w, v-w\rangle} = v - 2(v-w)\cdot\frac{|v|^2 - \langle v,w\rangle}{|v|^2 - 2\langle v,w\rangle + |w|^2} = v - (v-w)\cdot\frac{|v|^2-\langle v,w\rangle}{|v|^2-\langle v,w\rangle} = w$$

b) Per Induktion über n. Der Fall $n = 1$ ist hoffentlich klar. Und ist $A \in \mathrm{O}(n+1)$ beliebig, so ist entweder $A(e_{n+1}) = e_{n+1}$ und wir setzen $s = \mathrm{id}$ oder wir können gemäß a) eine Spiegelung s wählen mit $sA(e_{n+1}) = e_{n+1}$. In jedem Falle gilt dann dann

$$sA = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

für ein $B \in \mathrm{O}(n)$. Per Induktionsannahme lässt sich dann B als Produkt von $k \leq n$ Spiegelung $t_1, \dots, t_k$ an Hyperebenen $H_1, \dots, H_k$ im $\mathbb{R}^n$ darstellen. Aber dann ist sA wegen obiger Gleichung das Produkt der Spiegelungen $s_1, \dots, s_k$ an den Hyperebenen $H_1 \times \mathbb{R}, \dots, H_k \times \mathbb{R}$ von $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, und damit wegen $s^2 = 1$ schon $A = s \circ s_1 \circ \cdots \circ s_k$ entweder ein Produkt von k oder $k+1$ Spiegelungen (je Wahl von s), in jedem Falle von höchstens $n+1$ Spiegelungen wegen $k \leq n$.

□

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Betrachten Sie

$$S = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3,3,\mathbb{R})$$

und bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $A \in \mathrm{O}(3)$, derart dass $A^t \cdot S \cdot A$ Diagonalgestalt hat.

Lösungsskizze. Zuerst berechnet man da charakteristische Polynom. Das Ergebnis ist $\chi_A = T^3 - 18T^2 + 81T$. Das hat offenbar 0 als Nullstelle und $T^2 - 18T + 81 = (T-9)^2$, also $\chi_A = T(T-9)^2$. Wir wissen also aufgrund des reellen Spektralsatzes unmittelbar, dass A orthogonal ähnlich zu

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

ist. Um eine orthonormale Eigenbasis zu finden (die sich dann spaltenweise zu A zusammenfügt), bestimmen wir die Eigenräume. Der von 0 liefert mit etwas Gauß-Algorithmus

$$\mathrm{Eig}_0(A) = \ker(A) = \ker \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & -18 & 18 \\ 0 & 9 & 9 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \{(-t, -2t, 2t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\},$$

was etwa $(-1, -2, 2)$ als Basis besitzt. Und der von 9 ist

$$\mathrm{Eig}_9(A) = \ker(\mathbb{I}_3 \cdot 9 - A) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \{(2t - 2s, s, t) \in \mathbb{R}^3 \mid s, t \in \mathbb{R}\},$$

was etwa $(2, 0, 1), (-2, 1, 0)$ als Basis besitzt. Damit ist

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

eine Matrix mit $B^{-1} \cdot S \cdot B = D$, aber B ist noch nicht orthogonal. Wir wenden also das Gram-Schmidt-Verfahren auf die einzelnen Eigenräume an (Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind nach dem Spektralsatz ja automatisch orthogonal zu einander). Im ersten Falle müssen wir nur normieren, und erhalten

$$\frac{(-1, -2, 2)}{|(-1, -2, 2)|} = \frac{(-1, -2, 2)}{\sqrt[2]{1+4+4}} = (-1/3, -2/3, 2/3)$$

Für den zweiten Eigenraum setzen wir $b_1 = (2, 0, 1)$, $b_2 = (-2, 1, 0)$ und berechnen

$$b_2^{(2)} = b_2 - b_1 \cdot \tfrac{\langle b_1, b_2 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} = (-2, 1, 0) - (2, 0, 1) \cdot \tfrac{-4}{5} = (-2/5, 1, 4/5)$$

Damit erhalten wir

$$\frac{b_1}{|b_1|} = \frac{(2, 0, 1)}{\sqrt[2]{5}} = (2/\sqrt{5}, 0, 1/\sqrt{5}) \quad \text{und} \quad \frac{b_2^{(2)}}{|b_2^{(2)}|} = \frac{(-2, 5, 4)}{\sqrt[2]{45}} = (-2/(3\sqrt{5}), \sqrt{5}/3, 4/(3\sqrt{5}))$$

Diese drei Vektoren bilden eine orthonormale Eigenbasis von S und damit ist

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

eine mögliche Wahl wie gesucht.

Ein guter Trick um zu überprüfen, ob man sich bei der ganzen Chause verrechnet hat, ist übrigends zu schauen ob auch die Zeilen der hoffentlich orthogonalen Matrix wirklich Länge 1 haben orthogonal zueinander sind (die Spalten sollten diese Eigenschaften per Konstruktion haben). □