Aufgabe 1 (5 Punkte)

Betrachten sie die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3,3,\mathbb{Z}/3)$$

und finden sie eine invertierbare Matrix $A \in \mathrm{Mat}(3,3,\mathbb{Z}/3)$ derart, dass $A^t \cdot S \cdot A$ Diagonalgestalt hat mit höchstens einem Eintrag ungleich $0,1$ auf der Diagonale.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein $\mathbb{R}$ Untervektorraum und $v \in \mathbb{R}^n$, so existiert ein eindeutiges Element $w \in U$ mit

$$|v - w| = \min\{r \in \mathbb{R} \mid \exists u \in U : r = |v - u|\}$$

und es gilt $w = \mathrm{pr}_U(v)$.

Mit anderen Worten, die Orthogonalprojektion von v auf U liefert das eindeutige Element von U, das den kleinsten Abstand zu v hat.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Zeigen Sie:

a) Für je zwei $v, w \in \mathbb{R}^n$ mit $|v| = |w|$ existiert ein $(n-1)$-dimensionaler Untervektorraum $U \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\mathrm{S}_U(v) = w$.

b) Jedes Element $A \in \mathrm{O}(n)$ lässt sich als Produkt von höchstens n Spiegelungen an $(n-1)$-dimensionalen Unterräumen von $\mathbb{R}^n$ schreiben.

Hinweis: Imitieren Sie für b) den Beweis, dass jede Permutation ein Produkt von Transpositionen ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Betrachten Sie

$$\begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3,3,\mathbb{R})$$

und bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $A \in \mathrm{O}(3)$, derart dass $A^t \cdot S \cdot A$ Diagonalgestalt hat.