Aufgabe 1 (5 Punkte)

Betrachten Sie die drei Quadriken $q_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$q_1(x,y) = x^2 + xy - 1, \quad q_2(x,y) = xy - 1, \quad q_3(x,y) = x^2 + 2x + y$$

und bestimmen sie deren Normalformen und die fundamentale Gestalt ihrer Nullstellenmengen (also ob diese eine Ellipse, Hyperbel etc. ist)

Lösungsskizze. Da wir die starre Bewegung, die zur Normalform führt, nicht bestimmen müssen, können wir die Normalform direkt mithilfe des Klassifikationssatzes 7.5.15 ablesen. Wir bestimmen also zunächst die Bestandteile Quadriken. Diese lauten

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b_1 = (0,0), \quad b_2 = (0,0), \quad b_3 = (2,1)$$

$$c_1 = -1, \quad c_2 = -1, \quad c_3 = 0$$

Als nächstes gilt es die Eigenwerte der A_i zu bestimmen. Die charakteristischen Polynome lauten

$$\chi_{A_1} = T^2 - T - 1/4, \quad \chi_{A_2} = T^2 - 1/4, \quad \chi_{A_3} = T^2 - T$$

und damit haben wir als Eigenwerte

$$\{\tfrac{1-\sqrt{2}}{2}, \tfrac{1+\sqrt{2}}{2}\}, \quad \{-1/2, 1/2\}, \quad \{0,1\}$$

In den ersten beiden Fälle ist also jeweils einer positiv und einer negativ und es bleiben für die Gestalt der Nullstellenmenge nur zwei sich kreuzende Geraden oder eine Hyperbel, und im dritten Fall bleiben eine Gerade, die leere Menge (die natürlich durch die Lösung $(0,0)$ ausgeschlossen ist) und eine Parabel.

Um zwischen diesen auszuwählen, müssen wir entscheiden ob die Quadriken rein sind (also ob ihre Normalform einen linearen Anteil hat), und dazu reicht es zu bestimmen, ob b_i im Bild von A_i liegt. Dies ist offenbar in den ersten beiden Fällen wahr und im letzten nicht. Im letzten Fall berechnen wir dann $|\mathrm{pr}_{\mathrm{Im}(A_3)}(b_3)| = |\mathrm{pr}_{\mathbb{R}\times\{0\}}(2,1)| = |(2,0)| = 2$ und erhalten, dass die Normalform von q_3 durch

$$n_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto x^2 + 2y$$

gegeben ist. q_3 ist also eine unreine Quadrik, deren Nullstellenmenge eine Parabel bildet.

Im Falle der reinen Quadriken, müssen wir laut Klassifikationssatz (beziehungsweise der Diskussion direkt im Anschluss) jeweils noch ein $u_i \in \mathbb{R}^2$ bestimmen mit $b_i = -2A_i u_i$; der konstante Koeffizient der Normalform ist dann durch $c_i - \langle u_i, u_i \rangle_{A_i}$ gegeben. Aber hierfür können wir natürlich jeweils wegen $b_i = 0$ auch $u_i = 0$ wählen. Damit erhalten wir als Normalformen

$$n_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto \tfrac{\sqrt{2}+1}{2} \cdot x^2 - \tfrac{\sqrt{2}-1}{2} y^2 - 1$$

$$n_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto \tfrac{1}{2} \cdot x^2 - \tfrac{1}{2} y^2 - 1.$$

Die ersten beiden Quadriken sind also rein mit Hyperbeln als Nullstellenmengen. □

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei V ein endlich dimensionaler komplex euklidischer Vektorraum und $\varphi : V \to V$ $\mathbb{C}$-linear. Zeigen Sie: φ ist normal genau dann, wenn selbstadjungierte $\eta, \zeta : V \to V$ existieren mit

$$\varphi = \eta + \zeta \cdot i \quad \text{und} \quad \eta \circ \zeta = \zeta \circ \eta.$$

Zeigen Sie auch, dass η und ζ dann eindeutig als

$$\eta = \frac{\varphi + \varphi^\dagger}{2} \quad \text{und} \quad \zeta = \frac{\varphi - \varphi^\dagger}{2i}$$

bestimmt sind.

Lösungsskizze. Wir prüfen dass die am Ende definierten η, ζ in der Tat selbstadjungiert sind:

$$\eta^\dagger = \left(\frac{\varphi+\varphi^\dagger}{2}\right)^\dagger = \frac{\varphi^\dagger+(\varphi^\dagger)^\dagger}{2} = \frac{\varphi^\dagger+\varphi}{2} = \eta$$

$$\zeta^\dagger = \left(\frac{\varphi-\varphi^\dagger}{2i}\right)^\dagger = \frac{\varphi^\dagger-\varphi}{-2i} = \frac{\varphi-\varphi^\dagger}{2i} = \zeta$$

und offenbar gilt auch $\varphi = \eta+\zeta\cdot i$. Soweit gilt das noch für jede $\mathbb{C}$-lineare Abbildung φ und auch die Eindeutigkeit einer solchen Zerlegung gilt allgemein: Gilt $\varphi = \eta' + \zeta' \cdot i$ mit selbstadjunigerten η', ζ', so folgt

$$\varphi^\dagger = (\eta' + \zeta' \cdot i)^\dagger = (\eta')^\dagger - (\zeta')^\dagger \cdot i = \eta' - \zeta' \cdot i$$

und damit

$$\eta' = \frac{\eta' + \zeta' \cdot i + \eta' - \zeta' \cdot i}{2} = \tfrac{\varphi+\varphi^\dagger}{2} = \eta$$

und analog für ζ'.

Um dann noch zu sehen, dass $\varphi^\dagger \circ \varphi = \varphi \circ \varphi^\dagger$ genau dann gilt, wenn $\eta \circ \zeta = \zeta \circ \eta$ berechnen wir

$$\varphi^\dagger \circ \varphi = (\eta - \zeta \cdot i) \circ (\eta + \zeta \cdot i) = \eta^2 + (\eta \circ \zeta - \zeta \circ \eta) \cdot i + \zeta^2$$

$$\varphi \circ \varphi^\dagger = (\eta + \zeta \cdot i) \circ (\eta - \zeta \cdot i) = \eta^2 + (\zeta \circ \eta - \eta \circ \zeta) \cdot i + \zeta^2$$

Diese beiden Terme stimmen also genau dann überein, wenn $\eta \circ \zeta - \zeta \circ \eta = \zeta \circ \eta - \eta \circ \zeta$ gilt, oder äquivalent $(\eta \circ \zeta) \cdot 2 = (\zeta \circ \eta) \cdot 2$. □

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Sei V ein endlich dimensionaler komplex euklidischer Vektorraum und $\varphi \colon V \to V$ $\mathbb{C}$-linear. Zeigen Sie, dass φ normal ist, genau dann, wenn $||\varphi(v)|| = ||\varphi^\dagger(v)||$ für alle $v \in V$ gilt.

Lösungsskizze. Ist φ normal, so rechnen wir

$$[\![\varphi(v), \varphi(v)]\!] = [\![v, \varphi^\dagger(\varphi(v))]\!] = [\![v, \varphi(\varphi^\dagger(v))]\!] = \overline{[\![\varphi(\varphi^\dagger(v)), v]\!]} = \overline{[\![\varphi^\dagger(v), \varphi^\dagger(v)]\!]} = [\![\varphi^\dagger(v), \varphi^\dagger(v)]\!]$$

Wurzel ziehen, fertig.

Dass umgekehrt $[\![\varphi(v), \varphi(v)]\!] = [\![\varphi^\dagger(v), \varphi^\dagger(v)]\!]$ für alle $v \in V$ gilt ist wegen

$$[\![(\varphi \circ \varphi^\dagger)(v), v]\!] = [\![\varphi^\dagger(v), \varphi^\dagger(v)]\!] = [\![\varphi(v), \varphi(v)]\!] = \overline{[\![\varphi(v), \varphi(v)]\!]} = \overline{[\![v, \varphi^\dagger(\varphi(v))]\!]} = [\![(\varphi^\dagger \circ \varphi)(v), v]\!]$$

äquivalent zu $[\![(\varphi \circ \varphi^\dagger - \varphi^\dagger \circ \varphi)(v), v]\!] = 0$ für alle $v \in V$. Wir behaupten, dass dies $\varphi \circ \varphi^\dagger - \varphi^\dagger \circ \varphi = 0$ und damit die Normalität von φ impliziert.

Für allgemeine lineare Abbildungen $\psi \colon V \to V$ impliziert $[\![\psi(v), v]\!] = 0$ für alle $v \in V$ keineswegs $\psi = 0$ (man denke an eine Rotation um $\pi/2$ im reellen Fall), aber die Abbildung $\varphi \circ \varphi^\dagger - \varphi^\dagger \circ \varphi$ für die uns diese Aussage interessiert ist selbstadjungiert (sowohl $\varphi \circ \varphi^\dagger$ als auch $\varphi^\dagger \circ \varphi$ sind ja offenbar selbstadjungiert; die zugehörigen Matirzen $A^\dagger \cdot A$ waren ja unsere ersten Beispiele für positiv definite hermitesche Matrizen) für selbstadjungiertes ψ folgt in der Tat $\psi = 0$: In diesem Falle haben wir für $v, w \in V$ nämlich

$$0 = [\![\psi(v+w), v+w]\!] = [\![\psi(v), v]\!] + [\![\psi(v), w]\!] + [\![\psi(w), v]\!] + [\![\psi(w), w]\!]$$

$$= [\![\psi(v), w]\!] + [\![w, \psi^\dagger(v)]\!] = [\![\psi(v), w]\!] + [\![w, \psi(v)]\!] = [\![\psi(v), w]\!] + \overline{[\![\psi(v), w]\!]}$$

was besagt, dass $[\![\psi(v), w]\!]$ immer rein imaginär ist. Aber analog rechnet man

$$0 = [\![\psi(v + w \cdot i), v + w \cdot i]\!] = \cdots = [\![\psi(v), w \cdot i]\!] + \overline{[\![\psi(v), w \cdot i]\!]} = (-i) \cdot [\![\psi(v), w]\!] + i \cdot \overline{[\![\psi(v), w]\!]}$$

und damit $0 = [\![\psi(v), w]\!] - \overline{[\![\psi(v), w]\!]}$, was impliziert, dass $[\![\psi(v), w]\!]$ auch immer reell ist. Aber die einzige gleichzeitig reelle und rein imaginäre komplexe Zahl ist 0. Wir schließen also $[\![\psi(v), w]\!] = 0$ für alle $v, w \in \psi$ und damit $\psi(v) = 0$ aufgrund der Unimodularität von $[\![-,-]\!]$. □

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Entscheiden Sie welche der beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1+2i & 1-i & 1-i \\ 1-i & 1+2i & 1-i \\ 1-i & 1-i & 1+2i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1+2i & 1-i & 1+i \\ 1-i & 1+2i & 1-i \\ 1+i & 1-i & 1+2i \end{pmatrix}$$

in $\mathrm{Mat}(3,3,\mathbb{C})$ eine unitäre Eigenbasis besitzt und bestimmen Sie eine solche.

Lösungsskizze. Da die beiden Matrizen symmetrisch sind, sind ihre adjungierten einfach durch die komplex konjugierten gegeben. Damit rechnet man mit etwas Aufwand:

$$A^\dagger \cdot A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad A \cdot A^\dagger = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B^\dagger \cdot B = \begin{pmatrix} 9 & -2-2i & 8 \\ -2+2i & 9 & -2+2i \\ 8 & -2-2i & 9 \end{pmatrix}, \quad B \cdot B^\dagger = \begin{pmatrix} 9 & -2+2i & 8 \\ -2-2i & 9 & -2-2i \\ 8 & -2+2i & 9 \end{pmatrix}$$

Die Matrix A ist also normal und B nicht. Nach dem komplexen Spektralsatz besitzt also nur A ein unitäre Eigenbasis. Um sie zu bestimmen, berechnen wir wie immer die Eigenwerte. Mit dem charakteristischen Polynom ist das etwas langwierig (allein schon es auszurechnen dauert ein Weilchen), mit dem Minimalpolynom geht es schneller: Da A kein Vielfaches von $\mathbb{I}_3$ ist, kann $\min_A$ nicht linear sein. Wir bestimmen also

$$A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 6 \\ 6 & -3 & 6 \\ 6 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

und bestimmen die Optionen für $x, y \in \mathbb{C}$ in $T^2 + xT + y$ als Kandidat für das Minimalpolynom. Die ersten beiden Einträge der ersten Spalte (oder Zeile) liefern

$$(1+2i) \cdot x + 1 \cdot y = 3$$

$$(1-i) \cdot x + 0 \cdot y = -6$$

und damit

$$x = \frac{-6}{1-i} = \frac{(-6)(1+i)}{1^2 + (-1)^2} = -3-3i \quad \text{und} \quad y = 9i.$$

Als Kandidat erhalten wir also $T^2 - (3+3i)T + 9i$ und scharfes Hinsehen liefert, dass jede der 9 zu erfüllenden Gleichung in $A^2 - (3+3i)A + 9i \cdot \mathbb{I}_3$ eine der beiden oben ist. Es gilt also wirklich $\min_A = T^2 - (3+3i)T + 9i$, wohingegen ein längliche Rechnung $\chi_A = T^3 - (3+6i)T^2 - (9-18i)T + 27$ liefert. Aus dem Minimalpolynom liest man mittels quadratischer Ergänzung sofort die Nullstellen 3 und $3i$ ab, dies sind also die Eigenwerte von A.

Als nächstes gilt es Eigenbasen zu bestimmen. Wir haben

$$\mathrm{Eig}_3(A) = \ker \begin{pmatrix} -2+2i & 1-i & 1-i \\ 1-i & -2+2i & 1-i \\ 1-i & 1-i & -2+2i \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \{(s,s,s) \in \mathbb{C}^3 \mid s \in \mathbb{C}\}$$

Ein normierter Eigenvektor ist also $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$. und

$$\mathrm{Eig}_{3i}(A) = \ker \begin{pmatrix} 1-i & 1-i & 1-i \\ 1-i & 1-i & 1-i \\ 1-i & 1-i & 1-i \end{pmatrix}$$

$$= \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \{(-s-t,s,t) \in \mathbb{C}^3 \mid s,t \in \mathbb{C}\}$$

Eine Basis ist also etwa durch $(-1,0,1),(-1,1,0)$ gegeben. Um diese zu einer unitären Basis zu befördern wenden wir noch einmal das Gram-Schmidt-Verfahren an und erhalten

$$b_2^{(2)} = (-1,1,0) - (-1,0,1) \cdot \frac{\langle(-1,0,1),(-1,1,0)\rangle}{\langle(-1,0,1),(-1,0,1)\rangle} = (-1,1,0) + (1/2,0,-1/2) = (-1/2,1,-1/2).$$

Damit sind

$$\frac{(-1,0,1)}{|(-1,0,1)|} = \left(\tfrac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{und} \quad \frac{(-1,2,-1)}{|(-1,2,-1)|} = \left(\tfrac{-1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\tfrac{2}{3}}, \tfrac{-1}{\sqrt{6}}\right)$$

eine unitäre Basis des Eigenraumes. Es ist also insgesamt

$$U^{-1}AU = U^{\dagger}AU = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3i & 0 \\ 0 & 0 & 3i \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$\square$