Aufgabe 1 (5 Punkte)

Es sei $\varphi\colon V \to V$ $\mathbb{C}$-linear, wo V ein endlich dimensionaler komplex euklidischer Vektorraum ist. Zeigen Sie:

1. Es ist λ genau dann ein Eigenwert von φ, wenn $\overline{\lambda}$ einer von $\varphi^\dagger$ ist.
2. Ist φ normal, so ist $v \in V$ genau dann ein Eigenvektor von φ zu λ, wenn v ein Eigenvektor von $\varphi^\dagger$ zu $\overline{\lambda}$ ist.
3. Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass dies für nicht-normale falsch sein kann.

Lösungsskizze.

1. Zum Beispiel gilt $\chi_{\varphi^\dagger} = \overline{\chi}_\varphi$, wie man sofort an den zugehörigen Matrizen bezüglich einer unitären Basis von V abliest (oder noch leichter an einer diagonalisierenden). Man kann aber auch direkt argumentieren: Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ kein Eigenwert von φ, so ist $\mathrm{id}_V \cdot \lambda - \varphi$ bijektiv. Damit gibt es ein $\psi\colon V \to V$ mit $(\mathrm{id}_V \cdot \lambda - \varphi) \circ \psi = \mathrm{id}_V$ und es folgt
$$\psi^\dagger \circ (\mathrm{id}_V \cdot \overline{\lambda} - \varphi^\dagger) = \psi^\dagger \circ (\mathrm{id}_V \cdot \lambda - \varphi) = \mathrm{id}_V,$$
also ist auch $\mathrm{id}_V \cdot \overline{\lambda} - \varphi^\dagger$ invertierbar und damit $\overline{\lambda}$ kein Eigenwert von $\varphi^\dagger$. Es ist also jeder Eigenwert von $\varphi^\dagger$ das komplex konjugierte eines Eigenwerts von φ und die Umkehrung folgt analog.

2. Mit φ ist auch $\mathrm{id}_V \cdot \lambda - \varphi$ für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ normal, denn
$$\begin{aligned}(\mathrm{id}_V \cdot \lambda - \varphi)^\dagger \circ (\mathrm{id}_V \cdot \lambda - \varphi) &= (\mathrm{id}_V \cdot \overline{\lambda} - \varphi^\dagger) \circ (\mathrm{id}_V \cdot \lambda - \varphi) = \mathrm{id}_V \cdot |\lambda|^2 - \varphi \cdot \overline{\lambda} - \varphi^\dagger \cdot \lambda + \varphi\varphi^\dagger \\ &= \mathrm{id}_V \cdot |\lambda|^2 - \varphi \cdot \overline{\lambda} - \varphi^\dagger \cdot \lambda + \varphi^\dagger\varphi = (\mathrm{id}_V \cdot \lambda - \varphi) \circ (\mathrm{id}_V \cdot \overline{\lambda} - \varphi^\dagger) = (\mathrm{id}_V \cdot \lambda - \varphi) \circ (\mathrm{id}_V \cdot \lambda - \varphi)^\dagger,\end{aligned}$$
wobei wir im Zeilensprung die Normalität von φ benutzt haben. Aber dann folgt mit der dritten Aufgabe des letzten Zettels, dass für einen Eigenvektor v zum Eigenwert λ von φ
$$0 = ||(\mathrm{id}_V \cdot \lambda - \varphi)(v)|| = ||(\mathrm{id}_V \cdot \overline{\lambda} - \varphi^\dagger)(v)||$$
gilt und damit ist v im Kern von $\mathrm{id}_V \cdot \overline{\lambda} - \varphi^\dagger$ also ein Eigenwert von $\varphi^\dagger$ zu $\overline{\lambda}$. Die Umkehrung folgt wieder analog.

3. Man betrachte etwa
$$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2,2,\mathbb{C}).$$
Dann ist e_1 ein Eigenwert von A zum Eigenwert i, aber kein Eigenvektor von
$$A^\dagger = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix}.$$

□

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Zeigen Sie: Für $n \leq 6$ sind zwei komplexe $n \times n$-Matrizen genau dann ähnlich, wenn sie das gleiche charakteristische Polynom, das gleiche Minimalpolynom und alle (gemeinsamen) Eigenwerte die gleiche geometrische Vielfachheit haben. Finden Sie ein Gegenbeispiel für $n = 7$.

Hinweis: Bestimmen Sie die möglichen Jordanmatrizen.

Lösungsskizze. Offenbar sind die genannten Bedingung notwendig für beliebiges n. Sei also nun $n \leq 6$. Zwei Matrizen sind genau dann ähnlich, wenn sie (bis auf Reihenfolge der Kästchen) die gleiche Jordanform haben (hier benutzen wir die algebraische Abgeschlossenheit von $\mathbb{C}$: Nur deshalb besitzt jede Matrix überhaupt eine Jordanform!). Da die charakteristische Polynome der gegebenen Matrizen übereinstimmen haben sie die gleichen Eigenwerte, und damit auch Jordankästchen zu den gleichen Eigenwerten. Da weiter die geometrischen Vielfachheiten übereinstimmen, stimmt die Gesamtgröße der Jordankästchen zu jedem Eigenwert überein. Wir können uns also die Jordanblöcke zu einem gegebenem Eigenwert λ separat anschauen. Der Hauptraum zu diesem Eigenwert hat also Dimension $1 \le k \le 6$ und wir bezeichnen mit m die Vielfachheit von $T-\lambda$ im Minimalpolynom mit g die geometrische Vielfachheit von λ in den beiden Matrizen und gehen alle Möglichkeiten durch. Ich gebe immer die Jordankäschten an, und die zugeörigen Werte von m und g in der Form $n_1,\ldots,n_l \mid m,g$ mit $n_i \ge n_{i+1}$. Zur Bestimmung erinnere ich daran, dass dann $n_1 = m$ die Größe des größten Jordankästchens ist und $g = l$ die Anzahl der Jordanblöcke.

1. $k=1$. Es bleibt nur die Möglichkeit eines Jordankästchen der Größe 1, und es gilt sicherlich $m=1$, $g=1$, also
$$1 \mid 1,1$$
2. $k=2$. Es bleiben die Möglichkeiten eines Jordankästchen der Größe 2, welches $m=2, g=1$ hat, oder zwei Jordankästchen der Größe 1 mit $m=1, g=2$, also
$$2 \mid 2,1, \quad 1,1 \mid 1,2$$
3. $k=3$: Es gibt die $\mathrm{pt}(3)=3$ Möglichkeiten
$$3 \mid 3,1, \quad 2,1 \mid 2,2, \quad 1,1,1 \mid 1,3$$
4. $k=4$: Es gibt die $\mathrm{pt}(4)=5$ Möglichkeiten (diese hatten wir in der Vorlesung aufgedröselt)
$$4 \mid 4,1, \quad 3,1 \mid 3,2, \quad 2,2 \mid 2,2, \quad 2,1,1 \mid 2,3, \quad 1,1,1,1 \mid 1,4$$
5. $k=5$: Es gibt die $\mathrm{pt}(5)=7$ Möglichkeiten
$$5 \mid 5,1, \quad 4,1 \mid 4,2, \quad 3,2 \mid 3,2, \quad 3,1,1 \mid 3,3, \quad 2,2,1 \mid 2,3 \quad 2,1,1,1 \mid 2,4, \quad 1,1,1,1,1 \mid 1,5$$
6. $k=6$: Es gibt die $\mathrm{pt}(6)=11$ Möglichkeiten
$$6 \mid 6,1, \quad 5,1 \mid 5,2, \quad 4,2 \mid 4,2, \quad 4,1,1 \mid 4,3, \quad 3,3 \mid 3,2, \quad 3,2,1 \mid 3,3 \quad 3,1,1,1,1 \mid 3,5, \quad 2,2,2 \mid 2,3$$
$$2,2,1,1 \mid 2,4 \quad 2,1,1,1,1 \mid 2,5 \quad 1,1,1,1,1,1 \mid 1,6$$
7. $k=7$ Es gibt die $\mathrm{pt}(7)=15$ Möglichkeiten
$$7 \mid 7,1 \quad 6,1 \mid 6,2 \quad 5,2 \mid 5,2 \quad 5,1,1 \mid 5,3 \quad 4,3 \mid 4,2 \quad 4,2,1 \mid 4,3 \quad 4,1,1,1 \mid 4,4 \quad 3,3,1 \mid 3,3 \quad 3,2,2 \mid 3,3$$
$$3,2,1,1 \mid 3,4 \quad 3,1,1,1,1 \mid 3,5 \quad 2,2,2,1 \mid 2,4 \quad 2,2,1,1,1 \mid 2,5 \quad 2,1,1,1,1,1 \mid 2,6 \quad 1,1,1,1,1,1,1 \mid 1,7$$

Für $k \le 6$ taucht hier niemals eine Kombination von (m,g) doppelt auf, die möglichen Jordankästchen zu λ werden also durch algebraische Vielfachheit k von λ im charakteristischen Polynom , die geometrische Vielfachheit g von λ und die algebraische Vielfachheit m von λ im Minimalpolynom unterschieden. Der Fall $k=7, m=3, g=3$ taucht aber doppelt auf: Die beiden 7×7-Matrizen

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

sind für kein $\lambda \in K$, K ein beliebiger Körper, äquivalent, es stimmen aber alle betrachteten Invarianten überein.
$\square$

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Bestimmen Sie die Jordan'sche Normalform von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3,3,\mathbb{C}).$$

Lösungsskizze. Versuchen wir einmal das Minimalpolynom von A zu bestimmen (in der Hoffnung, dass es kleiner Grad hat als das charakteristische Polynom!). Da die Matrix kein Vielfaches der Identität ist, hat es nicht Grad 1. Es gilt dann

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

was uns beim Ansatz $T^2 + aT + b$ durch die ersten Stellen der ersten Zeile die Gleichungen

$$-1 + 0 \cdot a + 1 \cdot b = 0 \quad 0 + 1 \cdot a + 0 \cdot b = 0$$

also $b = 1$ und $a = 0$ liefert. Wir müssen also prüfen, ob $A^2 + A = 0$ gilt, was offenbar nicht der Fall ist. Das Minimalpolynom hat also mindestens Grad 3. Wir berechnen

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

was uns beim Ansatz $T^3 + aT^2 + bT + c$ vermöge der ersten Stellen der ersten Zeile die Gleichungen

$$0 - a + b + c = 0, \quad 1 + b = 0, \quad a = 0$$

liefert, und damit $a = 0$, $b = -1$, $c = 1$. Unser Kandidat ist also $T^3 - T + 1$, aber es gilt wieder nicht $A^3 - A + \mathbb{I}_4 = 0$. Wir wissen also, dass das Minimalpolynom Grad 4 hat und damit mit dem charakteristischen Polynom übereinstimmt. Wäre also diesmal doch schneller gewesen, das direkt auszurechnen. Machen wir mit dem Minimalpolynomansatz weiter so stellt sich heraus, dass $A^4 = 0$ gilt, und daher

$$\min_A = T^4 = \chi_A.$$

Die rechte Seite hätten wir natürlich auch direkt ausrechnen können. Ein Blick in die Tabelle aus der vorigen Aufgabe verrät uns nun aber direkt, dass A äquivalent zur Jordanmatrix $N(4)$ ist. Hätten wir nicht mit dem Minimalpolynom angefangen, sondern direkt das charakteristische Polynom ausgerechnet, so hätte man ähnlich verfahren können: Aus dem Satz von Cayley-Hamilton hätte man gewusst, dass das Minimalpolynom dann T, T^2, T^3 oder T^4 lauten muss, und diese durch Ausrechnen der Potenzen von A durchprobieren können.

Der Übung halber hier auch noch der Algorithmus mit dem man die Jordanbasis finden kann: Man berechnet

$$\mathrm{Im}(A) = \langle (1,-2,1,2), (1,-1,2,1), (0,1,0,-1)(0,0,1,0) \rangle$$

Offenbar bilden hiervon $(1,-1,2,1), (0,1,0,-1), (0,0,1,0)$ eine Basis. Damit haben wir

$$\mathrm{Im}(A^2) = \langle A \cdot (1,-1,2,1), A \cdot (0,1,0,-1), A \cdot (0,0,1,0) \rangle = \langle (0,1,0,-1), (1,-1,1,1), (0,1,0,-1) \rangle$$

wovon $(0,1,0,-1), (1,-1,1,1)$ eine Basis bildet. Und schließlich haben wir

$$\mathrm{Im}(A^3) = \langle A \cdot (0,1,0,-1), A \cdot (1,-1,1,1) \rangle = \langle (1,-1,1,1), (0,0,0,0) \rangle$$

wovon offenbar $(1,-1,1,1)$ eine Basis bildet (und das nächste Bild ist nun sicherlich 0). Damit wählen wir $(1,-1,1,1)$ im ersten Schritt des Algortihmus, nehmen als Urbild hiervon $(0,1,0,-1)$, müssen nicht durch Elemente vom

Kern auffüllen (da die beiden schon eine Basis von $\mathrm{Im}(A^2)$ sind), wählen als Urbild $(0,0,1,0)$, müssen nicht auffüllen (da die drei schon eine Basis von $\dim(\mathrm{Im}(A))$ sind) und wählen als Urbild $(0,0,0,1)$. Insgesamt erhalten wir also

$$B^{-1} \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n,n,K)$ für einen Körper K nilpotent derart, dass A zu

$$\mathrm{N} = \begin{pmatrix} \mathrm{N}(n_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathrm{N}(n_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathrm{N}(n_k) \end{pmatrix}$$

ähnlich ist. Zeigen Sie, dass dann $k = \dim(\mathrm{Ker}(A))$ und für jedes $l \geq 1$

$$|\{1 \leq i \leq k \mid n_i = l\}| = 2 \cdot \dim(\mathrm{Ker}(A^l)) - \dim(\mathrm{Ker}(A^{l+1})) - \dim(\mathrm{Ker}(A^{l-1}))$$

gelten, wodurch k und $n_1, \dots, n_k$ bis auf Reihenfolge eindeutig durch A bestimmt sind.

Hinweis: Es ist wohl am einfachsten für die zweite Aussage zunächst $\dim(\mathrm{Ker}(A^l))$ durch die n_i auszudrücken.

Lösungsskizze. Dass $k = \dim(\ker(N))$ gilt, liest man direkt ab, da N sich bis auf eine Permutation der Zeilen schon in Zeilenstufenform befindet und damit die Dimension des Kerns einfach die Anzahl der Nullzeilen ist: Es verschwinden jeweils genau die letzten Zeile der einzelnen Blöcke, wovon es k viele gibt. Aber da N und A ähnlich sind, haben ihre Kerne die gleiche Dimension, also folgt auch $k = \dim(\ker(A))$.

Wir folgen nun dem Hinweis: Und beobachten, dass $N(n)^j = 0$ für $j \geq n$ gilt, wohingegen $N(n)^j$ sonst Einsen auf der j-ten Nebendiagonale stehen hat und sonst nur Nullen. Insbesondere ist $N(n)^j$ in Zeilenstufenform mit j Nullzeilen, sodass man $\dim(\ker(N(n)^j)) = j$ für $j \leq n$ ablesen kann.

Bis auf Permutation der Zeilen ist also auch die Matrix

$$N^l = \begin{pmatrix} \mathrm{N}(n_1)^l & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathrm{N}(n_2)^l & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathrm{N}(n_k)^l \end{pmatrix}$$

für alle $l \geq 0$ in Zeilenstufenform, sodass wir die Dimension ihres Kerns einfach durch Zählen der Nullzeilen von N^l ablesen können. Für $l = 1$ haben wir das oben getan, und die gerade durchgeführte Analyse liefert

$$\dim(\ker(N^l)) = \sum_{i=1}^{k} \dim(\ker(\mathrm{N}(n_i)^l) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ n_i = j}} \dim(\ker(\mathrm{N}(n_i)^l)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \dim(\ker(\mathrm{N}(j)^l)) \cdot |\{1 \leq i \leq k \mid n_i = j\}| = \sum_{j=1}^{l-1} j \cdot |\{1 \leq i \leq k \mid n_i = j\}| + \sum_{j=l}^{n} l \cdot |\{1 \leq i \leq k \mid n_i = j\}|$$

wobei die zweite Gleichung einfach durch Änderung der Summationsfolge zustande kommt. Damit haben wir dann

$$\begin{aligned}\dim(\ker(N^{l+1}))-\dim(\ker(N^{l})) &= \sum_{j=1}^{l} j\cdot|\{1\le i\le k \mid n_i=j\}| + \sum_{j=l+1}^{n}(l+1)\cdot|\{1\le i\le k \mid n_i=j\}|\\ &\quad -\sum_{j=1}^{l-1} j\cdot|\{1\le i\le k \mid n_i=j\}| - \sum_{j=l}^{n} l\cdot|\{1\le i\le k \mid n_i=j\}|\\ &= l\cdot|\{1\le i\le k \mid n_i=j\}| - l\cdot|\{1\le i\le k \mid n_i=j\}| + \sum_{j=l+1}^{n}|\{1\le i\le k \mid n_i=j\}|\\ &= |\{1\le i\le k \mid n_i\ge l+1\}|\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}&|\{1\le i\le k \mid n_i=l\}| = |\{1\le i\le k \mid n_i\ge l\}| - |\{1\le i\le k \mid n_i\ge l+1\}|\\ &= \dim(\ker(N^{l}))-\dim(\ker(N^{l-1}))-\dim(\ker(N^{l+1}))+\dim(\ker(N^{l}))\end{aligned}$$

Da mit A und N auch A^l und N^l ähnlich sind, folgt die Behauptung. □