Aufgabe 1 (5 Punkte)

Es sei $\varphi\colon V \to V$ $\mathbb{C}$-linear, wo V ein endlich dimensionaler komplex euklidischer Vektorraum ist. Zeigen Sie:

1. Es ist λ genau dann ein Eigenwert von φ, wenn $\overline{\lambda}$ einer von $\varphi^\dagger$ ist.
2. Ist φ normal, so ist $v \in V$ genau dann ein Eigenvektor von φ zu λ, wenn v ein Eigenvektor von $\varphi^\dagger$ zu $\overline{\lambda}$ ist.
3. Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass dies für nicht-normale falsch sein kann.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Zeigen Sie: Für $n \leq 6$ sind zwei komplexe $n \times n$-Matrizen genau dann ähnlich, wenn sie das gleiche charakteristische Polynom, das gleiche Minimalpolynom und alle (gemeinsamen) Eigenwerte die gleiche geometrische Vielfachheit haben. Finden Sie ein Gegenbeispiel für $n = 7$.

Hinweis: Bestimmen Sie die möglichen Jordanmatrizen.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Bestimmen Sie die Jordan'sche Normalform von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3,3,\mathbb{C}).$$

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n,n,K)$ für einen Körper K nilpotent derart, dass A zu

$$\begin{pmatrix} \mathrm{N}(n_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathrm{N}(n_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathrm{N}(n_k) \end{pmatrix}$$

ähnlich ist. Zeigen Sie, dass dann $k = \dim(\mathrm{Ker}(A))$ und für jedes $l \geq 1$

$$|\{1 \leq i \leq k \mid n_i = l\}| = 2 \cdot \dim(\mathrm{Ker}(A^l)) - \dim(\mathrm{Ker}(A^{l+1})) - \dim(\mathrm{Ker}(A^{l-1}))$$

gelten, wodurch k und $n_1, \dots, n_k$ bis auf Reihenfolge eindeutig durch A bestimmt sind.

Hinweis: Es ist wohl am einfachsten für die zweite Aussage zunächst $\dim(\mathrm{Ker}(A^l))$ durch die n_i auszudrücken.