Aufgabe 1 (5 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

in $\mathrm{Mat}(4,4,\mathbb{Z}/5)$ eine Jordan'sche Normalform besitzt, und bestimmen Sie diese samt einer Jordanbasis.

Lösungsskizze. Da die Matrizen Begleitform haben, können wir die charakteristischen Polynome (und nach der nachfolgenden Aufgabe auch die Minimalpolynome) direkt ablesen: Sie lauten

$$T^4 + 2T^3 + 4T + 4 \quad \text{und} \quad T^4 + 3T^3 + 3T^2 + 3$$

Das linke Polynom hat keine Nullstelle, die erste Matrix also sicherlich keine Jordanform, das rechte hat 1 und 2 als Nullstellen, und 2 ist auch eine Nullstelle der Ableitung $4T^3 + 4T^2 + T$, 1 nicht. Damit muss

$$T^4 + 3T^3 + 3T^2 + 3 = (T-1)(T-2)^3$$

gelten, sodass die rechte Matrix in der Tat eine Jordanform besitzt.

Um diese zu finden, können wir einfach die nächste Aufgabe benutzen: Das Minimalpolynom stimmt mit dem charakteristischen Polynom überein, also hat der größte Jordanblock zum Eigenwert 1 Größe 1 und der zum Eigenwert 2 Größe 3. Es ist also

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

die gesuchte Jordanform von B.

Um auch noch eine Jordanbasis zu finden, gebe ich zwei Methoden an. In jedem Falle muss man $\mathrm{Eig}_1(B) = \mathrm{Hpt}_1(B)$ bestimmen. Dieser ist der Kern der Matrizen

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{II+I,(-1)\cdot I}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{III+II,(-1)\cdot II}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{IV+III,(-1)\cdot III}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

was uns $\mathrm{Eig}_1(B) = \{(2s, 2s, -s, s) \in \mathbb{Z}/5^4 \mid s \in \mathbb{Z}/5\}$ mit Basis $(2,2,4,1)$ liefert.

Folgen wir nun der Methode aus der Vorlesung berechnen wir als nächstes den Hauptrum von 2. Dafür haben wir

$$(B - \mathbb{I}_4 \cdot 2)^3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

was uns durch scharfes Hinsehen $\mathrm{Hpt}_2(B) = \{(4x + 4y + 4z, x, y, z) \in \mathbb{Z}/5^4 \mid x, y, z \in \mathbb{Z}/5\}$ liefert mit Basis $(4,1,0,0), (4,0,1,0), (4,0,0,1)$ liefert. Nun berechnen wir die iterierte Bildfolge auf dem Hauptraum: Es gilt

$$\mathrm{im}_{B - \mathbb{I}_4 \cdot 2}(\mathrm{Hpt}_2(B)) = \langle (2,2,1,0), (2,4,3,1), (4,4,2,0) \rangle$$

wovon offenbar $(2,2,1,0), (2,4,3,1)$ eine Basis ist und dann

$$\mathrm{im}_{(B - \mathbb{I}_4 \cdot 2)^2}(\mathrm{Hpt}_2(B)) = \langle (1,3,0,1), (3,4,0,3) \rangle$$

wovon offenbar $(1,3,0,1)$ eine Basis ist. Iteriertes Wählen von Urbildern (Auffüllen durch Element von $\mathrm{Eig}_2(B)$ kommt nicht vor), liefert also $(1,3,0,1), (2,2,1,0), (4,1,0,0)$ als Basis des Jordanblocks und damit insgesamt:

$$D^{-1} \cdot B \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alternativ, kann man auch zunächst den Eigenraum $\mathrm{Eig}_2(B)$ bestimmen und dann iteriert Urbilder einer Basis hiervon wählen, bis man genügend Elemente für eine Basis des Hauptraums zusammen hat (dessen Dimension ja gerade die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts ist), in unserem Falle also 3 Stück. Der Eigenraum ist der Kern von

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{II+3I,2\cdot I}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{III+3II,2\cdot II}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{IV+3III,2\cdot III}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

was uns $\mathrm{Eig}_2(B) = \{(s, 3s, 0, s) \in \mathbb{Z}/5^4 \mid s \in \mathbb{Z}/5\}$ mit Basis $(1,3,0,1)$ liefert. Um ein Urbild zu bestimmen gehen wir also einfach obige Schritte des Gaußalgorithmus nocheinmal mit rechter Seite $(1,3,0,1)$, was

$$(1,3,0,1)^t \overset{II+3I,2\cdot I}{\rightsquigarrow} (2,1,0,1)^t \overset{III+3II,2\cdot II}{\rightsquigarrow} (2,2,3,1)^t \overset{IV+3III,2\cdot III}{\rightsquigarrow} (2,2,1,0)^t$$

was, indem man es also rechte Seite an obige Manipulation anflanscht, als Urbildmenge $\{(2+t, 2+3t, 1, t) \in \mathbb{Z}/5^4 \mid t \in \mathbb{Z}/5\}$ liefert, wovon $(2,2,1,0)$ eine Basis ist. Und dann das gleiche noch einmal

$$(2,2,1,0)^t \overset{II+3I,2\cdot I}{\rightsquigarrow} (4,3,1,0)^t \overset{III+3II,2\cdot II}{\rightsquigarrow} (4,1,0,0)^t \overset{IV+3III,2\cdot III}{\rightsquigarrow} (4,1,0,0)^t$$

was als Urbildraum $\{(4+t, 1+3t, 0, t) \in \mathbb{Z}/5^4 \mid t \in \mathbb{Z}/5\}$ liefert mit Basis $(4,1,0,0)$. Hier liest man nun also die gleiche Jordanbasis ab, wie beim Verfahren aus der Vorlesung. □

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Es sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ K-linear. Für $v \in V$ und $\varphi\colon V \to V$ setzen wir

$$\langle v \rangle_\varphi := \langle v, \varphi(v), \varphi^2(v), \dots \rangle_K \subseteq V$$

und

$$k = \max\{n \in \mathbb{N} \mid v, \varphi(v), \dots, \varphi^n(v) \text{ sind verschieden und linear unabhängig}\}.$$

Zeigen Sie:

1. Die Abbildung
$$b\colon \{1, \dots, k+1\} \longrightarrow V, \quad i \longmapsto \varphi^{i-1}(v)$$
ist eine nummerierte Basis von $\langle v \rangle_\varphi$, es gibt ein eindeutiges Polynom $F \in K[T]$ vom Grad höchstens k mit $\varphi^{k+1}(v) = (F(\varphi))(v)$ und es gilt $\mathrm{M}(\varphi_{|\langle v \rangle_\varphi}, b, b) = \mathrm{C}_{T^{k+1}-F}$.
2. Für jedes normierte Polynom $G \in K[T]$ gilt $\min_{\mathrm{C}_G} = G$.

Lösungsskizze. 1. Per Definition sind $v, \varphi(v), \dots, \varphi^k(v), \varphi^{k+1}(v)$ linear abhängig. In einer nicht-trivialen Darstellung
$$0 = v \cdot a_0 + \dots + \varphi^k(v) \cdot a_k + \varphi^{k+1}(v) \cdot a_{k+1}$$
gilt dann, da $v, \varphi(v), \dots, \varphi^k(v)$ linear unabhängig sind, kann hier dann nicht $a_{k+1} = 0$ gelten und wir erhalten
$$\varphi^{k+1}(v) = [F(\varphi)](v) \quad \text{für} \quad F = \sum_{i=0}^{k} \frac{a_i}{a_{k+1}} \cdot T^i \in K[T],$$
was die Existenz von F zeigt. Und ist $G \in K[T]$ ein weiteres Polynom von Grad höchstens k mit $[G(\varphi)](v) = \varphi^{k+1}(v)$, so folgt
$$0 = [(G-F)(\varphi)](v) = \sum_{i=0}^{k} \varphi^i(v) \cdot \left(G_i - \frac{a_i}{a_{k+1}}\right)$$
was aufgrund der linearen Unabhängigkeit von $v, \varphi(v), \dots, \varphi^k(v)$ dann $G_i = a_i/a_{k+1}$ für $1 \le i \le k$ und damit $G = F$ liefert. Als nächstes zeigen wir, dass $v, \varphi(v), \dots, \varphi^k(v)$ eine Basis von $\langle v \rangle_\varphi$ ist. Dazu bleibt nur

zu zeigen, dass $\varphi^{k+i}(v)$ auch für $i \geq 1$ in $\langle v, \varphi(v), \ldots, \varphi^k(v)\rangle_K$ liegt. Für $i = 1$ haben wir das gerade oben gezeigt und per Induktion folgt es für größeres i: Es gilt schließlich

$$\varphi^{k+i+1}(v) = \varphi(\varphi^{k+i}(v))$$

und per Induktion gilt $\varphi^{k+i}(v) \in \langle v, \varphi(v), \ldots, \varphi^k(v)\rangle_K$ und damit

$$\varphi(\varphi^{k+i}(v)) \in \langle \varphi(v), \varphi^2(v), \ldots, \varphi^{k+1}(v)\rangle_K \subseteq \langle v, \varphi(v), \ldots, \varphi^k(v)\rangle_K,$$

die letzte Inklusion wieder wegen des schon bewiesenen Falls $i = 1$. Da $v, \varphi(v), \ldots, \varphi^k(v)$ per Annahme linear unabhängig sind, bilden sie also eine Basis von $\langle v\rangle_K$.

Zum Schluss bestimmen wir noch die darstellende Matrix von $\varphi\colon \langle v\rangle_K \to \langle v\rangle_K$ bezüglich dieser Basis b. Dass $\mathrm{Mat}(\varphi, b, b) = \mathrm{C}_{T^{k+1}-F}$ gilt übersetzt sich zu

$$\varphi(b_i) = \begin{cases} b_{i+1} & 1 \leq i \leq k \\ \sum_{j=1}^{k+1} b_j \cdot F_{j-1} & i = k+1 \end{cases}$$

und Einsetzen liefert in der Tat

$$\varphi(b_i) = \varphi(\varphi^{i-1}(v)) = \varphi^i(v) = \begin{cases} b_{i+1} & i \leq k \\ [F(\varphi)](v) & i = k+1 \end{cases}$$

und offenbar gilt

$$[F(\varphi)](v) = \sum_{j=0}^{k} \varphi^j(v) \cdot F_j = \sum_{j=0}^{k} b_{j+1} \cdot F_j = \sum_{j=1}^{k+1} b_j \cdot F_{j-1}.$$

2. Per Konstruktion gilt

$$\mathrm{C}_G \cdot e_i = \begin{cases} e_{i+1} & i < k+1 \\ -\sum_{i=1}^{k+1} e_i \cdot G_{i-1} & i = k+1 \end{cases}$$

Und damit insbesondere $\mathrm{C}_G^i \cdot e_1 = e_{i+1}$ für $1 \leq i \leq k$. Es sind also die Elements $e_1, \mathrm{C}_G \cdot e_1, \ldots, \mathrm{C}_G^k \cdot e_1$ linear unabhängig. Für ein Polynom $H \in K[T]$ mit $H(\mathrm{C}_G) = 0$ vom Grad höchstens K folgt also

$$0 = [H(\mathrm{C}_G)](v) = \sum_{i=0}^{k} \mathrm{C}_G^i \cdot e_i \cdot H_i = \sum_{i=0}^{k} e_{i+1} \cdot H_i$$

und damit $H = 0$. Das Minimalpolynom von C_G hat also mindestens Grad $k+1$. Nun kann man natürlich einfach den Satz von Cayley-Hamilton zusammen mit Aufgabe 4 von Zettel 7 (wo wir $\chi_{\mathrm{C}_G} = G$ berechnet haben) anwenden; aber man kann $G(\mathrm{C}_G) = 0$ auch einfach nachrechnen (und dann wird Teil 2 der nächsten Aufgabe unabhängig von Betrachtungen zum charakteristischen Polynom): Es gilt

$$G(\mathrm{C}_G) \cdot e_j = G(\mathrm{C}_G) \cdot \mathrm{C}_G^{j-1} \cdot e_1 = \mathrm{C}_G^{j-1} \cdot G(\mathrm{C}_G) \cdot e_1$$

und

$$G(\mathrm{C}_G) \cdot e_1 = \sum_{i=0}^{k+1} \mathrm{C}_G^i \cdot e_1 \cdot G_i = \left(\sum_{i=0}^{k} e_{i+1} \cdot G_i\right) + \mathrm{C}_G \cdot e_{k+1} = \sum_{i=0}^{k} e_{i+1} \cdot G_i - \sum_{i=1}^{k+1} e_i \cdot G_{i-1} = 0$$

Aber $G(\mathrm{C}_G) \cdot e_j = 0$ für alle $1 \leq j \leq k+1$ impliziert $G(\mathrm{C}_G) = 0$.

□

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Es sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum, $\varphi\colon V \to V$ K-linear.

1)* Seien $U, W \subseteq V$ K-Untervektorräume, derart dass U φ-invariant ist und $V = U \oplus W$. Zeigen Sie, dass das Minimalpolynom von φ nicht immer das kleinste gemeinsame Vielfache der Minimalpolynome von $\varphi_{|U}: U \to U$ und $p \circ \varphi_{|W}: W \to W$ ist, wo $p: V \to W$ die eindeutig bestimmte Abbildung mit $p(w) = w$ und $p(u) = 0$ für alle $w \in W$ und $u \in U$ ist.

2)* Benutzen Sie die zweiten Aufgabe um einen direkten Beweis der Abschätzung $\deg(\min_\varphi) \leq \dim(V)$ zu geben, der weder den Elementarteilersatz noch das charakteristische Polynom verwendet.

Lösungsskizze. Hier hatte sich auf den Zettel der Fehlerteufel eingeschlichen, und das auf gleich mehrfache Art: Ohne die dort fehlende Annahme, dass $V = U \oplus W$ gilt, ist die Abbildugn p in 1. nicht wohldefiniert. Fügt man der Aufgabenstellung diese Annahme hinzu, so ist die Aussage im ursprünglichen 1. aber falsch (und die Aufgabe sollte wie in obigen 1)* daraus besteht ein Gegenbeispiel anzugeben und sie zu Aufgabe 4 von Zettel 5 kontastieren; aber das habe ich beim Tippen am später Abend verbockt). Und für 2. sollte man auch nicht diese falsche Aussage benutzen, sondern Aufgabe 3 von Zettel 8. Mea culpa.

1)* Ein Gegenbeispiel ist einfach durch einen Jordanblock

$$\mathrm{J}_\lambda(2) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2, 2, K)$$

gegeben: Man nehme $V = K^2$, $U = \langle e_1 \rangle_K$, was offenbar $\mathrm{J}_\lambda(2)$-invariant ist und $W = \langle e_2 \rangle_K$. Dann sind sowohl das Minimalpolynom der Einschränkung von $\mathrm{J}_\lambda(2)$ auf U und die Komposition von $p \circ \mathrm{J}_\lambda(2)_{|\langle e_2 \rangle}$ jeweils einfach die Multiplikation mit λ, daher ihre Minimalpolynome $T - \lambda$ und der größte gemeinsame Teiler auch $T - \lambda$, wohingegen das Minimalpolynom von $\mathrm{J}_\lambda(2)$ das Polynom $(T - \lambda)^2 = T^2 - 2\lambda T + \lambda^2$ lautet.

2)* Wir zeigen per Induktion über k, dass für jeden Unterraum φ-invarianten Unterraum U der sich als $K[T]$-Modul von höchstens k Elementen erzuegen lässt $\deg(\min_{\varphi_{|U}}) \leq \dim(U)$ gilt. Für $k = 1$ ist das Teil der zweiten Aufgabe (mit Gleichheit anstatt nur einer Abschätzung). Lässt sich dann U als $K[T]$-Modul von $v_1, \ldots, v_{k+1}$ erzeugen, so betrachte $W = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle_{K[T]}$ und $X = \langle v_{k+1} \rangle_{K[T]}$. Dann ist nach Aufgabe 3 vom achten Zettel das Minimalpolynom von $\varphi_{|U}$ der größte gemeinsame Teiler von $\varphi_{|X}$ und $\varphi_{|W}$. Das zweite dieser Polynome hat nach Induktionsvoraussetzung Grad höchstens $\dim(W)$ und das erste genau Grad $\dim(U)$. Da das Produkt dieser beiden Polynome sicherlich ein gemeinsames Vielfaches ist, hat das Minimalpolynom von $\varphi_{|U}$ schonmal höchstens Grad $\dim(W) + \dim(X)$. Aber gilt $\dim(U) = \dim(X) + \dim(W) - \dim(X \cap W)$, sodass diese Abschätzung noch nicht gut genug ist. Aber offenbar haben $\min_{\varphi_{|X}}$ und $\min_{\varphi_{|W}}$ das Polynom $\min_{\varphi_{|X \cap W}}$ als gemeinsamen Faktor, sodass auch

$$\min_{\varphi_{|W}}, \min_{\varphi_{|X}} \mid \frac{\min_{\varphi_{|X}} \cdot \min_{\varphi_{|W}}}{\min_{\varphi_{|X \cap W}}}$$

und damit auch das kleinste gemeinsame Vielfache der beiden linken Polynome das rechte teilt. Ich behaupte nun, dass $\deg(\min_{\varphi_{|X \cap W}}) = \dim(X \cap W)$ gilt, sodass dann wie gewünscht

$$\begin{aligned} \deg(\min \varphi_{|U}) \leq \deg\left(\frac{\min_{\varphi_{|X}} \cdot \min_{\varphi_{|W}}}{\min_{\varphi_{|X \cap W}}}\right) &= \deg(\min_{\varphi_{|X}}) + \deg(\min_{\varphi_{|W}}) - \deg(\min_{\varphi_{|X \cap W}}) \\ &\leq \dim(X) + \dim(W) - \dim(X \cap W) = \dim(U) \end{aligned}$$

gilt. Für die Gleichung $(\min_{\varphi_{|X \cap W}}) = \dim(X \cap W)$ reicht es schließlich nach Aufgabe 2 nachzuweisen, dass $X \cap W$ φ-zyklisch ist. Aber jeder φ-invariante Unterraum Y eines φ-zyklischen Raumes U ist wieder φ-zyklisch: Ist U etwa von $u \in U$ erzeugt, so ist

$$c: K[T] \longrightarrow U, \quad F \longmapsto [F(\varphi)](u)$$

surjektiv. Aber es gilt dann $c^{-1}(Y) = \langle G \rangle_{K[T]}$ für ein $G \in K[T]$, da ja jeder $K[T]$-Untermodul von $K[T]$ von einem Element erzeugt wird. Aber dann hat die Komposition

$$K[T] \xrightarrow{G \cdot -} K[T] \xrightarrow{c} U$$

genau Y als Bild, und damit ist Y ebenfalls φ-zyklisch.

$\square$

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Bestimmen Sie die Elementarteilerform der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 7 & 12 \\ 2 & 3 & 12 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3,3,\mathbb{Z}).$$

Lösungsskizze. Wir gehen den Algorithmus der Vorlesung durch und bereinigen zunächst die erste Spalte und tauschen die (betragsmäßig) kleinste Zahl an erste Stelle:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 7 & 12 \\ 2 & 3 & 12 \end{pmatrix} \overset{II-2I,III-I}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \overset{I\longleftrightarrow II, I\longleftrightarrow II}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Dann bereinigen wir wieder die erste Zeile

$$\overset{II-3II}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

was die erste Runde beendet, da 1 die anderen Einträge offenbar teilt. Für die zweiten Runde ist die Spalte schon bereinigt, und bereinigen der Zeile liefert

$$\overset{III-3II}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

was die Elementarteilerform ist. □