Aufgabe 1 (5 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

in $\mathrm{Mat}(4, 4, \mathbb{Z}/5)$ eine Jordan'sche Normalform besitzt, und bestimmen Sie diese samt einer Jordanbasis.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Es sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ K-linear. Für $v \in V$ und $\varphi\colon V \to V$ setzen wir

$$\langle v \rangle_\varphi := \langle v, \varphi(v), \varphi^2(v), \ldots \rangle_K \subseteq V$$

und

$$k = \max\{n \in \mathbb{N} \mid v, \varphi(v), \ldots, \varphi^n(v) \text{ sind verschieden und linear unabhängig}\}.$$

Zeigen Sie:

1. Die Abbildung
$$b\colon \{1, \ldots, k+1\} \longrightarrow V, \quad i \longmapsto \varphi^{i-1}(v)$$
ist eine nummerierte Basis von $\langle v \rangle_\varphi$, es gibt ein eindeutiges Polynom $F \in K[T]$ vom Grad höchstens k mit $\varphi^{k+1}(v) = (F(\varphi))(v)$ und es gilt $\mathrm{M}(\varphi_{|\langle v \rangle_\varphi}, b, b) = \mathrm{C}_{T^{k+1}-F}$.
2. Für jedes normierte Polynom $G \in K[T]$ gilt $\min_{\mathrm{C}_G} = G$.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Es sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum, $\varphi\colon V \to V$ K-linear.

1)* Seien $U, W \subseteq V$ K-Untervektorräume, derart dass U φ-invariant ist und $V = U \oplus W$. Zeigen Sie, dass das Minimalpolynom von φ nicht immer das kleinste gemeinsame Vielfache der Minimalpolynome von $\varphi_{|U}\colon U \to U$ und $p \circ \varphi_{|W}\colon W \to W$ ist, wo $p\colon V \to W$ die eindeutig bestimmte Abbildung mit $p(w) = w$ und $p(u) = 0$ für alle $w \in W$ und $u \in U$ ist.

2)* Benutzen Sie die zweiten Aufgabe um einen direkten Beweis der Abschätzung $\deg(\min_\varphi) \leq \dim(V)$ zu geben, der weder den Elementarteilersatz noch das charakteristische Polynom verwendet.

Diese Aufgabe war ursprünglich falsch gestellt! Dies ist die korrigierte Version

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Bestimmen Sie die Elementarteilerform der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 7 & 12 \\ 2 & 3 & 12 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3, 3, \mathbb{Z}).$$