Aufgabe 1 (5 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(3, 3, \mathbb{Z}/5)$$

diagonalisierbar ist.

Lösungsskizze. Wir berechnen zunächst die Eigenwerte obiger Matrix, nennen wir sie A . Diese sind diejenigen $\lambda \in \mathbb{Z}/5$ für die

$$\det(\mathbb{I}_3 \cdot \lambda - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda+4 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda+2 & 4 \\ 4 & 1 & \lambda+4 \end{pmatrix} = (\lambda+4) \cdot \det \begin{pmatrix} \lambda+2 & 4 \\ 1 & \lambda+4 \end{pmatrix} = (\lambda+4) \cdot ((\lambda+2) \cdot (\lambda+4) + 1) = (\lambda+4) \cdot (\lambda^2 + \lambda + 4)$$

verschwindet. Das ist genau für $\lambda = 1$ und $\lambda = 2$ der Fall, wie man durch einfaches Einsetzen prüft (obiger Ausdruck lässt sich auch zu $(\lambda+4) \cdot (\lambda+3)^2$ umschreiben).

Wir müssen nun also schauen ob es genügend Eigenvektoren zu diesen Eigenwerten gibt um eine Basis aufzuspinnen. Wir berechnen

$$\dim(\text{Eig}_1(A)) = \dim \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \dim(\text{Eig}_2(A)) = \dim \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aus der ersten Rechnung wissen wir, dass diese Dimensionen mindestens 1 sind, und ich behaupte sie sind beide genau 1. Das kann man etwas mittels Gauß-Algorithmus direkt nachrechnen. Nach der Dimensionsformel ist die Behauptung aber auch äquivalent dazu, dass die Ränge der Matrizen beide 2 sind. Und offenbar sind jeweils die ersten beiden Spalten der Matrizen linear unabhängig, was uns jegliches weitere Rechnen erspart.

Insbesondere gibt es jedenfalls keine 3 linear unabhängigen Eigenvektoren und A ist nicht diagonalisierbar. $\square$

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei K ein Körper und $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass jede Matrix $A \in \text{Mat}(n, n, K)$ mit $\text{rk}(A) \leq 1$ zu genau einer der Matrizen

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

mit $\lambda \in K$ ähnlich ist.

Lösungsskizze. Gilt $\text{rk}(A) = 0$ so ist einfach $A = 0$, was der Fall $\lambda = 0$ der linken gesuchten Gestalt ist. Wir können daher direkt $\text{rk}(A) = 1$ und damit $\dim(\ker(L(A))) = n - 1$ annehmen. Dann können wir also ein $0 \neq v \in \text{Im}(L(A))$ wählen, und $\{v\}$ ist dann eine Basis des Bildes von $L(A)$. Da $A \cdot v \in \text{Im}(L(A)) = \langle v \rangle_K$ muss es also ein $\lambda \in K$ geben, mit $A \cdot v = v \cdot \lambda$.

Ist $\lambda \neq 0$, so können wir eine Basis $b_2, \dots, b_n$ von $\ker(L(A))$ wählen und durch $b_1 = v$ zu einer geordneten Basis von K^n ergänzen. Bezüglich dieser Basis hat $L(A)$ dann offenbar die linke der beiden gesuchten Gestalten (mit anderen Worten, für die Matrix B mit Spalten die b_i hat $B^{-1} \cdot A \cdot B$ die gesuchte Form).

Ist $\lambda = 0$, so gilt $v \in \ker(L(A))$, und wir können v mittels $(b_3, \dots, b_n)$ zu einer Basis von $\ker(L(A))$ ergänzen. Wählen wir uns dann noch ein $w \in K^n$ mit $A \cdot w = v$ (v liegt ja schließlich im Bild von $L(A)$) und setzen $b_2 = w$, $b_1 = v$, so erhalten wir eine Basis b von K^n bezüglich derer die Darstellungsmatrix von $L(A)$ genau die rechte gesuchte Form hat.

Das zeigt, dass jedes A zu einer der gegebenen Matrizen ähnlich ist. Zur Eindeutigkeit beobachten wir, dass die Matrizen auf der linken Seite genau die Eigenwerte $\{0, \lambda\}$ haben (außer im Falle $n = 1$, aber dann ist sowieso

nichts zu tun), und die rechte Matrix nur $\{0\}$. Da die Eigenwerte laut einer Aufgabe vom ersten Zettel bei ähnlichen Matrizen übereinstimmen, kann also A nur zu genau einer der gegebenen Matrizen ähnlich sein, sobald sie außer 0 noch einen weiteren Eigenwert hat. Weiterhin ist A , wie wir uns in der Vorlesung überlegt hatten nur zur Nullmatrix ähnlich wenn schon $A = 0$ gilt. Und damit bleibt für eine Matrix $A \neq 0$ mit einzigem Eigenwert 0 nur die rechte der Matrizen übrig. $\square$

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Finden Sie jeweils Beispiele von einem Körper K und polynomiellen Funktionen $f, g: K \rightarrow K$, so dass

- $f \cdot g = \text{const}_0$ ohne dass $f = \text{const}_0$ oder $g = \text{const}_0$,
- $f \cdot g = \text{const}_1$ ohne dass f oder g konstant sind.

Lösungsskizze. Für a) kann man etwa $K = \mathbb{Z}/2$ und $f(t) = t$ und $g(t) = t + 1$ nehmen. Für b) funktioniert $K = \mathbb{Z}/2$ nicht, da jede nicht-konstante Funktion dann eine Nullstelle hat. Aber für $K = \mathbb{Z}/3$ können wir etwa $f = g$ als die Funktion mit $f(0) = 1 = f(1), f(2) = 2$ nehmen. Diese ist polynomiell entweder nach dem Satz aus der Vorlesung, dass überhaupt jede Funktion von einem endlichen Körper in sich selber polynomiell ist, oder explizit gegeben durch $f(t) = 2t^2 + t + 1$, was man einfach durch Ausprobieren finden kann (aber etwa auch mit der Lagrange'schen Interpolationsformel aus dem Skript). $\square$

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass für jeden kommutativen Ring R und polynomielle Funktionen $f, g: R \rightarrow R$ mit Koeffizientenfolgen r beziehungsweise s die Verkettung $f \circ g$ ebenfalls polynomiell ist mit Koeffizientensequenz

$$i \mapsto \sum_{k \geq 0} r_k \cdot \sum_{\substack{n_1, \dots, n_k \geq 0 \\ \sum_{j=1}^k n_j = i}} \prod_{j=1}^k s_{n_j}.$$

Lösungsskizze. Zunächst einmal betrachten wir den Fall $f = (t \mapsto t^m)$. In diesem Fall gilt es

$$g(t)^m = \sum_{i \geq 0} \left(\sum_{\substack{n_1, \dots, n_m \geq 0 \\ \sum_{j=1}^m n_j = i}} \prod_{j=1}^m s_{n_j} \right) \cdot t^i$$

nachzuweisen. Das machen wir per Induktion über m . Im Fall $m = 0$ steht beiderseits einfach 1; rechter Hand, da für $i > 0$ die innere Summe über die Leere Menge läuft und damit 0 liefert und der Term für $i = 0$ zu einer einelementigen Summe über das leere Produkt, also zu 1, kollabiert.

Für den Induktionsschritt rechnen wir

$$g(t)^{m+1} = \left(\sum_{i \geq 0} \left(\sum_{\substack{n_1, \dots, n_m \geq 0 \\ \sum_{j=1}^m n_j = i}} \prod_{j=1}^m s_{n_j} \right) \cdot t^i \right) \cdot \left(\sum_{i \geq 0} s_i \cdot t^i \right)$$

mittels Induktionshypothese und dann mittels der Formel für Produkte von Polynomen weiter

$$= \sum_{i \geq 0} \sum_{\substack{k, l \geq 0 \\ k+l=i}} \left(\sum_{\substack{n_1, \dots, n_m \geq 0 \\ \sum_{j=1}^m n_j = k}} \prod_{j=1}^m s_{n_j} \right) s_l t^i = \sum_{i \geq 0} \left(\sum_{\substack{n_1, \dots, n_{m+1} \geq 0 \\ \sum_{j=1}^{m+1} n_j = i}} \prod_{j=1}^{m+1} s_{n_j} \right) \cdot t^i$$

wobei der letzte Schritt nur in der Umbenennung $n_{m+1} = l$ besteht.

Ist nun f beliebig so haben wir $f(g(t)) = \sum_{k \geq 0} r_k \cdot g(t)^k$, was durch Einsetzen und Umstellen

$$f(g(t)) = \sum_{k \geq 0} r_k \cdot \sum_{i \geq 0} \left(\sum_{\substack{n_1, \dots, n_k \geq 0 \\ \sum_{j=1}^k n_j = i}} \prod_{j=1}^k s_{n_j} \right) \cdot t^i = \sum_{i \geq 0} \left(\sum_{k \geq 0} r_k \cdot \sum_{\substack{n_1, \dots, n_k \geq 0 \\ \sum_{j=1}^k n_j = i}} \prod_{j=1}^k s_{n_j} \right) \cdot t^i$$

liefert, wie behauptet. □