Aufgabe 1 (5 Punkte)

Zeigen Sie: Ist K ein Körper, so gibt es unendlich viele normierte irreduzible Polynome über K.

Hinweis: Imitieren Sie den Beweis für die analoge Aussage über Primzahlen.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Zeigen Sie: Der $\mathbb{Z}[T]$-Untermodul $\{F \in \mathbb{Z}[T] \mid F(0) \text{ ist gerade}\}$ von $\mathbb{Z}[T]$ lässt sich von zwei Elementen, aber nicht von einem Element erzeugen.

Die dritte Aufgabe bedarf ein klein wenig Notation: Ist R ein kommutativer Ring, so heißen zwei Elemente $r, s \in R$ *assoziiert*, falls es eine Einheit $u \in R$ gibt mit $u \cdot r = s$. Dies ist eine Äquivalenzrelation $\sim$. Auf den Assoziiertheitsklassen $R/\sim$ definiert

$$X \text{ teilt } Y :\Longleftrightarrow \exists x \in X, y \in Y, r \in R \colon x \cdot r = y$$

eine partielle Ordnung, falls R ein Integritätsbereich ist. Gegeben nun eine Menge $E \subseteq R$, so heißt $r \in R$ ein *größter gemeinsamer Teiler* der Elemente von E, falls $[r] \in R/\sim$ ein größtes Element von

$$\{X \in R/\sim \mid X \text{ teilt } [e] \text{ für jedes } e \in E\}$$

bezüglich der Teilbarkeitsrelation ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring. Zeigen Sie:

1. Assoziiertheit ist wirklich eine Äquivalenzrelation auf R.
2. Ist R ein Integritätsbereich, so ist Teilbarkeit wirklich eine partielle Ordnung auf den Assoziiertheitsklassen in R.
3. Ist R ein Integritätsbereich, $t \in R$ und $E \subseteq R$ mit $\langle E \rangle_R = \langle t \rangle_R$ so ist t ein größter gemeinsamer Teiler der Elemente von E.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler von $T^5+2T^3+2T^2+T+2$ und T^3+2T^2+T+2 in $\mathbb{Q}[T]$ mittels des euklidischen Algorithmus und finden Sie eine Darstellung von ihm als Linearkombination der beiden Polynome.