Aufgabe 1 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass für einen endlichen Körper K mit q Elementen von den q^2 normierten quadratischen Polynomen in $K[T]$ genau $\frac{q^2+q}{2}$ reduzibel und $\frac{q^2-q}{2}$ irreduzibel sind

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Finden Sie das Inverse von 113 in $\mathbb{Z}/691$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung des Polynoms $F = T^5 - 6T^4 - T + 6 \in K[T]$ für $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ und $\mathbb{Z}/p$ für p prim (inklusive Bestimmung der Vielfachheiten der auftretenden Faktoren).

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Sei K ein Körper und $1 \leq k, l \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie: Hat irgendein Element in $K \setminus \{0\}$ genau l-viele k-te Wurzeln, so hat jedes Element von $K \setminus \{0\}$ entweder keine oder genau l-viele k-te Wurzeln.

b) Folgern Sie: Ist K endlich, so

- besitzt entweder jedes Element von $K \setminus \{0\}$ genau eine Kubikwurzel, oder es
- besitzt jedes Element von $K \setminus \{0\}$ entweder keine oder genau drei Kubikwurzeln.

c) Zeigen Sie: Der zweite Fall in b) kann nur dann eintreten, wenn $3 \mid |K| - 1$, und in diesem Fall

- besitzen genau $\frac{|K|-1}{3}$ Elemente von $|K| \setminus \{0\}$ eine (und damit drei) Kubikwurzel(n), und
- für $K = \mathbb{Z}/p$ mit $3 \mid p - 1$ sind dies sind genau diejenigen $0 \neq a \in \mathbb{Z}/p$ mit $a^{\frac{p-1}{3}} = 1$.

Bemerkung. *Der zweite Fall von b) tritt tatsächlich sogar genau dann ein, wenn* $3 \mid |K| - 1$, *aber das einzusehen bedarf selbst für* $K = \mathbb{Z}/p$ *ein klein wenig Gruppentheorie, und bleibt, genau wie das Studium höherer Wurzeln in endlichen Körper, den nächsten Algebravorlesungen vorbehalten.*