Aufgabe 1 (5 Punkte)

Sei R und S kommutative Ringe und $I \subseteq R$ ein R-Untermodul. Zeigen Sie:

a) Die Präkomposition mit dem Ringhomomorphismus

$$[-]_I : R \longrightarrow R/I, \quad r \longmapsto [r]_I$$

liefert eine Bijektion

$$\{\varphi : R/I \to S \mid \varphi \text{ ist Ringhomomorphismus}\}$$
$$\longrightarrow \{\varphi : R \to S \mid \varphi \text{ ist Ringhomomorphismus und } \forall i \in I : \varphi(i) = 0\}$$

b) Ist $\varphi : R \to S$ surjektiv, so ist die aus a) induzierte Abbildung

$$R/\ker(\varphi) \longrightarrow S$$

ein Isomorphismus.

c) Die Abbildung

$$R[T] \longrightarrow R, \quad T \longmapsto a$$

liefert einen Isomorphismus $R[T]/\langle T - a\rangle \to R$ für jedes $a \in R$.

d) Ist R ein Integritätsbereich und $a \neq 0$ so liefert

$$R[T] \longrightarrow R^{\text{frc}}, \quad T \longmapsto 1/a$$

einen Isomorphismus $R[T]/\langle aT - 1\rangle \to R[1/a]$, wo

$$R[1/a] = \{q \in R^{\text{frc}} \mid \exists r \in R, n \in \mathbb{N} : q = r/a^n\}.$$

Bemerkung. *Insbesondere folgt aus c), dass $R[T]/\langle F\rangle$ für $F \in R[T]$ irreduzibel kein Körper sein muss, wenn R nicht euklidisch ist, und aus d) dass $R[T]/\langle F\rangle$ keine Basis als R-Modul besitzen muss, wenn $F \in R[T]$ nicht normiert ist.*

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Konstruieren Sie, für jede Primzahl $p \in \mathbb{N}$ mit $p \equiv_4 1$ einen Ringisomorphismus

$$\mathbb{Z}/p[T]/\langle T^2 + 1\rangle \longrightarrow \mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p.$$

Zeigen Sie auch, dass die beiden Seite für $p = 2$ nicht isomorph sind.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die Matrix

$$\begin{pmatrix} T^3 + 8T & -4T & -T^2 + 1 \\ 2T^3 + 18T & -9T & -2T^2 + 2 \\ T^4 + 8T^2 - T & -4T^2 & -T^3 + T + 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3, 3, \mathbb{Q}(T))$$

diagonalisierbar ist, wo $\mathbb{Q}(T) = \mathbb{Q}[T]^{\text{frc}}$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring, M ein R-Modul mit zwei R-Untermoduln $U, V \subseteq M$, die endliche Basen besitzen und für die $M = U \oplus V$ gilt. Zeigen Sie: Ist $\varphi : M \to M$ eine R-lineare Abbildung mit $\mathrm{Im}_\varphi(U) \subseteq U$, so gilt

$$\det(\varphi) = \det(\varphi_{|U} : U \to U) \cdot \det(\mathrm{pr}_V \circ \varphi_{|V} : V \to V)$$

wo $\mathrm{pr}_V : M \to V$ die eindeutig bestimmte R-lineare Abbildung mit $(\mathrm{pr}_V)_{|V} = \mathrm{id}_V$ und $(\mathrm{pr}_V)_{|U} = 0$ ist.

Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass sich eine nummerierte Basis b von U und b' eine von V zu einer Basis c von $U \oplus V$ zusammenfügen, und die Darstellungsmatrix dann von der Form

$$\mathrm{M}(\varphi, c) = \begin{pmatrix} \mathrm{M}(\varphi_{|U}, b, b) & \mathrm{M}(\mathrm{pr}_U \circ \varphi_{|V}, b', b) \\ 0 & \mathrm{M}(\mathrm{pr}_V \circ \varphi_{|V}, b', b') \end{pmatrix}$$

ist. Dies folgt aus Satz 1.9 des Skripts, den ich aber in der Vorlesung noch nicht bewiesen habe.