Aufgabe 1 (5 Punkte)

Sei $0 \neq F \in \mathbb{R}[T]$ ein Polynom. Zeigen Sie:

a) Ist $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von F, so auch das komplexe Konjugat $\overline{z}$.

b) Es gilt
$$\deg(F) \equiv_2 |\{r \in \mathbb{R} \mid F(r) = 0\}|.$$

b)* Es gilt
$$\deg(F) \equiv_2 \sum_{r \in \mathbb{R}} \mathrm{m}_F(T - r).$$

c) Ist F irreduzibel, so ist F linear oder quadratisch.

Hinweis: Für b)* und c) werden sie wohl den Fundamentalsatz der Algebra verwenden müssen.

Lösungsskizze. Zunächst einmal ist Teil b), wie er auf dem Zettel stand nicht korrekt: Für das Polynom $T^2 \in \mathbb{R}[T]$ steht links 2 und rechts 1. Die korrekte Form der Aufgabe ist b)*: Man muss die Nullstellen natürlich mit Vielfachheit zählen, da habe ich mich verschrieben.

a) Wir rechnen für $F = \sum_{i \geq 0} F_i \cdot T^i$, dass
$$F(\overline{z}) = \sum_{i \geq 0} F_i \cdot \overline{z}^i = \sum_{i \geq 0} \overline{F_i} \cdot \overline{z^i} = \sum_{i \geq 0} \overline{F_i \cdot z^i} = \overline{\sum_{i \geq 0} F_i \cdot z^i} = \overline{F(z)} = \overline{0} = 0,$$
wobei wir in jedem Schritt nur verwendet haben, dass die komplexe Konjugation $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Ringhomomorphismus ist (und dass $\overline{r} = r$ für alle $r \in \mathbb{R}$).

Die gleiche Rechnung zeigt allgemeiner dass $\overline{z}$ eine Nullstelle von $\overline{F} = \sum_{i \geq 0} \overline{F_i} \cdot T^i$ ist, wenn $F \in \mathbb{C}[T]$ beliebig mit Nullstelle $\overline{z} \in \mathbb{C}$ ist.

Teile b)* und c) basieren auf folgender gemeinsamer Vorüberlegung: Ist $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ eine Nullstelle von F so auch $\overline{z}$ nach a), sodass wegen $\overline{z} \neq z$ in diesem Falle insgesamt $(T - z) \cdot (T - \overline{z}) \in \mathbb{C}[T]$ schon $F \in \mathbb{C}[T]$ teilt, also etwa $F = (T - z) \cdot (T - \overline{z}) \cdot H$ für ein $H \in \mathbb{C}[T]$. Aber es gilt
$$(T - z)(T - \overline{z}) = T^2 - (z + \overline{z}) \cdot T + z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}[T],$$
da
$$\overline{z + \overline{z}} = \overline{z} + \overline{\overline{z}} = z + \overline{z} \quad \text{und} \quad \overline{z \cdot \overline{z}} = \overline{z} \cdot \overline{\overline{z}} = z \cdot \overline{z},$$
sodass $z + \overline{z}, z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}$ gilt. Hieraus folgt, dass auch $H \in \mathbb{R}[T]$ gelten muss: Wir können schließlich F in $\mathbb{R}[T]$ mit Rest durch $T^2 - (z + \overline{z}) \cdot T + z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}[T]$ teilen und erhalten
$$F = (T^2 - (z + \overline{z}) \cdot T + z \cdot \overline{z}) \cdot \tilde{H} + R$$
für $\tilde{H}, R \in \mathbb{R}[T]$ und entweder $R = 0$ oder sonst zumindest $\deg(R) < 2$. In $\mathbb{C}[T]$ haben wir aber auch
$$F = (T^2 - (z + \overline{z}) \cdot T + z \cdot \overline{z}) \cdot H + 0$$
aber eine solche Darstellung ist nach Satz 5.2.1 im Skript eindeutig. Es folgt also ($R = 0$ und) $H = \tilde{H} \in \mathbb{R}[T]$ wie behauptet.

b)* Wir können etwa per Induktion über den Grad von F argumentieren: Offenbar stimmt die Aussage für $\deg(F) = 0$, da F dann keine Nullstelle hat. Und gilt $\deg(F) = n + 1$, so unterscheiden wir zwei Fälle. Hat F eine reelle Nullstelle $\lambda \in \mathbb{R}$ so können wir $F = (T - \lambda) \cdot G$ für ein $G \in \mathbb{R}[T]$ mit $\deg(G) = n$ schreiben und erhalten nach Induktionsvoraussetzung
$$\deg(F) = 1 + \deg(G) \equiv_2 1 + \sum_{r \in \mathbb{R}} \mathrm{m}_G(T - r) = \sum_{r \in \mathbb{R}} \mathrm{m}_F(T - r),$$

da offenbar

$$\mathrm{m}_F(T-r) = \begin{cases} \mathrm{m}_G(T-r) & r \neq \lambda \\ 1+\mathrm{m}_G(T-r) & r = \lambda \end{cases}.$$

Hat F keine reelle Nullstelle so muss F nach dem Fundamentalsatz der Algebra also eine Nullstelle $z \in \mathbb{C}/\mathbb{R}$ besitzen. Nach der Vorüberlegung gilt dann

$$F = (T^2 + aT + b) \cdot H$$

für ein Polynom $T^2 + aT + b \in \mathbb{R}[T]$ ohne reelle Nullstelle und $H \in \mathbb{R}[T]$ mit $\deg(H) = n-1$. Es folgt nach Induktionsvoraussetzung

$$\deg(F) = 2 + \deg(H) \equiv_2 \deg(H) = \sum_{r\in\mathbb{R}} \mathrm{m}_H(T-r) = \sum_{r\in\mathbb{R}} \mathrm{m}_F(T-r),$$

da offenbar $\mathrm{m}_F(T-r) = \mathrm{m}_H(T-r)$ für alle $r \in \mathbb{R}$ gilt.

c) Gilt $\deg(F) \geq 3$ so hat F, wieder nach dem Fundamentalsatz der Algebra eine komplexe Nullstelle $z \in \mathbb{C}$. Ist sogar $z \in \mathbb{R}$ so ist sicherlich F nicht irreduzibel, und ist $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ so gilt nach der Vorüberlegung $F = (T^2 + aT + b) \cdot H$ für ein Polynom H mit $\deg(H) = \deg(F) - 2 \geq 1$. Wieder ist dann F offenbar nicht irreduzibel.

□

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4,4,\mathbb{Q})$$

die Eigenwerte, ihre algebraischen und geometrischen Vielfachheiten und entscheiden Sie, ob A diagonalisierbar ist.

Lösungsskizze. Das charakteristische Polynom berechnet sich zu $T^4 - 5T^3 + 9T^2 - 7T + 2$. Wie immer prüfen wir zunächst die möglichen rationalen Nullstellen $-2, -1, 1, 2$ und werden bei 1 und 2 fündig. Polynomdivision durch $(T-1)(T-2) = T^2 - 3T + 2$ liefert

$$T^4 - 5T^3 + 9T^2 - 7T + 2 = (T^2 - 2T + 1) \cdot (T^2 - 3T + 2)$$

und entweder scharfes Hinsehen oder quadratische Ergänzung liefern $T^2 - 2T + 1 = (T-1)^2$, also insgesamt

$$\chi_A = (T-1)^3 \cdot (T-2).$$

Die Eigenwerte von A sind also $1 \in \mathbb{Q}$ mit algebraischer Vielfachheit 3 und $2 \in \mathbb{Q}$ mit algebraischer Vielfachheit 1. Da wegen Satz 6.2.12 die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts immer zwischen 1 und seiner algebraischen Vielfachheit liegt, sehen wir ohne weitere Rechnung, dass die geometrische Vielfachheit von $2 \in \mathbb{Q}$ ebenfalls 1 sein muss. Es bleibt noch

$$\mathrm{m}_A(1) = \dim\ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

zu bestimmen. Das geht entweder mit dem Gauß-Algorithmus, oder indem man etwa beobachtet dass der obere linke 3×3-Block Determinante -1 hat. Die Matrix hat also Rang 3 und damit gilt $\mathrm{m}_A(1) = 1$ für die geometrische Vielfachheit. Das ist kleiner als die algebraische Vielfachheit von 1, also ist A nach dem zweiten Diagonalisierbarkeitkriterium nicht diagonalisierbar. □

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{2025} \in \mathrm{Mat}(3,3,\mathbb{Z}).$$

Hinweis: Denken Sie an die Motivation Matrizen überhaupt auf Diagonalisierbarkeit zu untersuchen!

Lösungsskizze. Wir folgen dem Hinweis und versuchen die Matrix einmal zu diagonalisieren. Das charakteristische Polynom berechnet sich zu $T^3 - T^2 + T - 1$, was sicherlich $1 \in \mathbb{Q}$ als Nullstelle hat, sich dann zu $(T-1)(T^2+1)$ vereinfacht, was offenbar noch $i, -i \in \mathbb{C}$ als Nullstellen hat. Die Matrix ist also nach Korollar 6.1.7 über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar. Mit anderen Worten es gibt eine invertierbare Matrix $B \in \mathrm{Mat}(3,3,\mathbb{C})$ mit

$$B \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

in $\mathrm{Mat}(3,3,\mathbb{C})$. Es gilt dann

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{2025} = (B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \cdot B)^{2025} = B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}^{2025} \cdot B$$

$$= B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1^{2025} & 0 & 0 \\ 0 & i^{2025} & 0 \\ 0 & 0 & (-i)^{2025} \end{pmatrix} \cdot B = B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Da $i^{2025} = i^{2024} \cdot i = (i^4)^{506} \cdot i = i$ und genauso für $-i$. □

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Sei R ein euklidischer Ring bezüglich $\delta\colon R \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$, und $f, g, h \in R$, $g, h \neq 0$.

a) Zeigen Sie: Sind g und h teilerfremd, so existieren $f_1, f_2 \in R$ mit

$$\frac{f}{gh} = \frac{f_1}{g} + \frac{f_2}{h} \in R^{\mathrm{frc}}$$

b) Zeigen Sie: Für jedes $n \geq 0$ gibt es Elemente $f_0, f_1, \dots f_n \in R$ mit

$$\frac{f}{g^n} = \sum_{i=0}^{n} \frac{f_i}{g^i} \quad \text{und} \quad f_i = 0 \text{ oder } \delta(f_i) < \delta(g)$$

für alle $1 \leq i \leq n$.

c) Folgern Sie: Gilt $g = \prod_{i=1}^{k} p_i^{n_i}$ für verschiedene irreduzible Elemente $p_1, \dots, p_k \in R$ und $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, so gibt es eine Darstellung

$$\frac{f}{g} = b + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{f_{i,j}}{p_i^j}$$

mit $b, f_{i,j} \in R$ und $f_{i,j} = 0$ oder $\delta(f_{i,j}) < \delta(p_i)$ für alle $1 \leq i \leq k$ und $1 \leq j \leq n_i$.

Lösungsskizze. a) Das g und h teilerfremd sind impliziert nach dem Lemma von Bézout, dass es $p, q \in R$ gibt mit $pg + qh = 1$. Es ist dann

$$\frac{f}{gh} = \frac{fpg + fqh}{gh} = \frac{fq}{g} + \frac{fp}{h}$$

wie gewünscht.

b) Am einfachsten ist wohl ein Beweis per Induktion über n. Ist $n=0$ so nehme man einfach $f_0=f$. Für den Induktionsschritt schreibe $f=g\cdot p+q$ mit $q=0$ oder $\delta(q)<\delta(g)$, sodass

$$\frac{f}{g^{n+1}}=\frac{g\cdot p+q}{g^{n+1}}=\frac{p}{g^n}+\frac{q}{g^{n+1}}.$$

Per Induktionsannahme gibt es dann $f_0,\dots,f_n\in R$ mit

$$\frac{p}{g^n}=\sum_{i=0}^{n}\frac{f_i}{g^i}$$

und den gewünschten Gradabschätzungen. Setzen wir noch $f_{n+1}=q$ erhalten wir also die gewünschte Darstellung von f/g^{n+1}.

c) Dies folgt nun auch leicht per Induktion über k (die Anzahl der unterschiedlichen Primfaktoren in g). Der Fall $k=1$ ist genau die Aussage von b), und gilt $g=\prod_{i=1}^{k+1}p_i^{n_i}$ Primfaktoren, so können wir $h=\prod_{i=1}^{k}p_i^{n_i}$ und $h'=p_{k+1}^{n_{k+1}}$ setzen. Wir erhalten dann aus a), dass

$$\frac{f}{g}=\frac{x}{h}+\frac{y'}{h}$$

gilt für irgendwelche $x,y\in R$. Aber sowohl h als auch h' haben weniger als $k+1$ Primfaktoren (nämlich k und 1), per Induktionshypothese gibt es also Darstellungen

$$x/h=b'+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{f_{i,j}}{p_i^j}\quad\text{und}\quad y/h'=b''+\sum_{j=1}^{n_{k+1}}\frac{f_{k+1,j}}{p_{k+1}^j}$$

mit den geforderten Gradabschätzungen was zusammengefügt das gesuchte

$$\frac{f}{g}=(b'+b'')+\sum_{i=1}^{k+1}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{f_{i,j}}{p_i^j}$$

ergibt.

□

Anmerkung: Eine solche Darstellung heißt eine *Partialbruchzerlegung* von f/g. Für $R=\mathbb{R}[T]$ lässt sich als Kombination der Aufgaben 1 und 4 etwa jede rationale Funktion $F/G\in\mathbb{R}(T)$ als Summe von Termen der Form

$$\frac{c}{(T+a)^i}\quad\text{und}\quad\frac{cT+d}{(T^2+aT+b)^i}$$

mit $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ und $4b>a^2$ schreiben. Da für die assoziierten Funktionen $\mathbb{R}\setminus\{-a\}\to\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ Stammfunktionen (im Sinne der Analysisvorlesung) explizit angegeben werden können, nämlich

$$t\longmapsto\begin{cases}c\cdot\ln|t+a| & i=1\\ \frac{-c}{(i-1)\cdot(t+a)^{i-1}} & i\geq 2\end{cases}$$

im ersten Fall und

$$t\longmapsto\begin{cases}\frac{c}{2}\cdot\ln(t^2+at+b)+\frac{2d-ac}{\sqrt[2]{4b-a^2}}\cdot\arctan\left(\frac{2t+a}{\sqrt[2]{4b-a^2}}\right) & i=1\\ \frac{c}{2(i-1)}\frac{1}{(t^2+at+b)^{i-1}}+\beta_i\cdot\arctan\left(\frac{2t+a}{\sqrt[2]{4b-a^2}}\right)+\sum_{j=1}^{i-1}\gamma_{i,j}\cdot\frac{2t+a}{(t^2+at+b)^j} & i\geq 2\end{cases}$$

mit

$$\beta_i=\frac{(2d-ac)\cdot\binom{2i-1}{i-1}}{(4b-a^2)^{i-1}\cdot\sqrt[2]{4b-a^2}}\quad\text{und}\quad\gamma_{i,j}=\frac{(2d-ac)\cdot\binom{2(i-1)}{i-1}}{2\cdot(4b-a^2)^{i-j}\cdot j\cdot\binom{2j}{j}}$$

im zweiten Fall, kann man mit Hilfe der Partialbruchzerlegung sämtliche rationalen Funktionen über $\mathbb{R}$ elementar integrieren.