Aufgabe 1 (5 Punkte)

Sei $0 \neq F \in \mathbb{R}[T]$ ein Polynom. Zeigen Sie:

a) Ist $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von F, so auch das komplexe Konjugat $\overline{z}$.

b)* Es gilt
$$\deg(F) \equiv_2 \sum_{r \in \mathbb{R}} \mathrm{m}_F(T - r).$$

c) Ist F irreduzibel, so ist F linear oder quadratisch.

Hinweis: Für b)* und c) werden sie wohl den Fundamentalsatz der Algebra verwenden müssen.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Bestimmen Sie für die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4, 4, \mathbb{Q})$$
die Eigenwerte, ihre algebraischen und geometrischen Vielfachheiten und entscheiden Sie, ob A diagonalisierbar ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Berechnen Sie
$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{2025} \in \mathrm{Mat}(3, 3, \mathbb{Z}).$$

Hinweis: Denken Sie an die Motivation Matrizen überhaupt auf Diagonalisierbarkeit zu untersuchen!

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Sei R ein euklidischer Ring bezüglich $\delta \colon R \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$, und $f, g, h \in R$, $g, h \neq 0$.

a) Zeigen Sie: Sind g und h teilerfremd, so existieren $f_1, f_2 \in R$ mit
$$\frac{f}{gh} = \frac{f_1}{g} + \frac{f_2}{h} \in R^{\mathrm{frc}}$$

b) Zeigen Sie: Für jedes $n \geq 0$ gibt es Elemente $f_0, f_1, \ldots f_n \in R$ mit
$$\frac{f}{g^n} = \sum_{i=0}^{n} \frac{f_i}{g^i} \quad \text{und} \quad f_i = 0 \text{ oder } \delta(f_i) < \delta(g)$$
für alle $1 \leq i \leq n$.

c) Folgern Sie: Gilt $g = \prod_{i=1}^{k} p_i^{n_i}$ für verschiedene irreduzible Elemente $p_1, \ldots, p_k \in R$ und $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, so gibt es eine Darstellung
$$\frac{f}{g} = b + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{f_{i,j}}{p_i^j}$$
mit $b, f_{i,j} \in R$ und $f_{i,j} = 0$ oder $\delta(f_{i,j}) < \delta(p_i)$ für alle $1 \leq i \leq k$ und $1 \leq j \leq n_i$.

Anmerkung: Eine solche Darstellung heißt eine *Partialbruchzerlegung* von f/g. Für $R = \mathbb{R}[T]$ lässt sich als Kombination der Aufgaben 1 und 4 etwa jede rationale Funktion $F/G \in \mathbb{R}(T)$ als Summe von Termen der Form

$$\frac{c}{(T+a)^i} \quad \text{und} \quad \frac{cT+d}{(T^2+aT+b)^i}$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $4b > a^2$ schreiben. Da für die assoziierten Funktionen $\mathbb{R}\setminus\{-a\} \to \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Stammfunktionen (im Sinne der Analysisvorlesung) explizit angegeben werden können, nämlich

$$t \longmapsto \begin{cases} c \cdot \ln|t+a| & i = 1 \\ \frac{-c}{(i-1)\cdot(t+a)^{i-1}} & i \geq 2 \end{cases}$$

im ersten Fall und

$$t \longmapsto \begin{cases} \frac{c}{2} \cdot \ln(t^2+at+b) + \frac{2d-ac}{\sqrt[2]{4b-a^2}} \cdot \arctan\left(\frac{2t+a}{\sqrt[2]{4b-a^2}}\right) & i = 1 \\ \frac{c}{2(i-1)} \frac{1}{(t^2+at+b)^{i-1}} + \beta_i \cdot \arctan\left(\frac{2t+a}{\sqrt[2]{4b-a^2}}\right) + \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_{i,j} \cdot \frac{2t+a}{(t^2+at+b)^j} & i \geq 2 \end{cases}$$

mit

$$\beta_i = \frac{(2d-ac)\cdot\binom{2i-1}{i-1}}{(4b-a^2)^{i-1}\cdot\sqrt[2]{4b-a^2}} \quad \text{und} \quad \gamma_{i,j} = \frac{(2d-ac)\cdot\binom{2(i-1)}{i-1}}{2\cdot(4b-a^2)^{i-j}\cdot j\cdot\binom{2j}{j}}$$

im zweiten Fall, kann man mit Hilfe der Partialbruchzerlegung sämtliche rationalen Funktionen über $\mathbb{R}$ elementar integrieren.