Aufgabe 1 (5 Punkte)

Es seien $\iota\colon K \to L$ Körper und $A \in \mathrm{Mat}(n,n,K)$ und $\lambda \in K$ ein Eigenwert von A, $F, P \in K[T]$ und mit P irreduzibel und $P \mid F$. Zeigen Sie:

a) Es gilt $\mathrm{m}_A(\lambda) = \mathrm{m}_{\iota_*(A)}(\iota(\lambda))$, wo
$$\iota_*\colon \mathrm{Mat}(n,n,K) \longrightarrow \mathrm{Mat}(n,n,L)$$
die Abbildung ist, die ι auf jeden Koeffizienten einer Matrix anwendet.

b) Es gilt $\mathrm{m}_F(P) = \mathrm{m}_{\iota_*(F)}(\iota_*(P))$, wo
$$\iota_*\colon K[T] \longrightarrow L[T], \quad T \longmapsto T$$
die Abbildung ist, die ι auf jeden Koeffizienten eines Polynoms anwendet. Insbesondere gilt $\mathrm{m}_F(T-\mu) = \mathrm{m}_{\iota_*(F)}(T-\iota(\mu))$ für jede Nullstelle $\mu \in K$ von F.

Anmerkung: Insbesondere ändern sich weder die algebraische noch die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts wenn wir eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n,n,K)$ in $\mathrm{Mat}(n,n,L)$ auffassen. Es können einzig neue Eigenwerte hinzukommen.

Lösungsskizze. a) Nach der Dimensionsformel haben wir $\mathrm{rk}(\mathbb{I}_n \cdot \lambda - A) = n - \mathrm{m}_A(\lambda)$ und nach dem Rangsatz finden wir dann eine invertierbare Matrix $B \in \mathrm{Mat}(n,n,K)$ mit

$$B^{-1} \cdot (\mathbb{I}_n \cdot \lambda - A) \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit genau $n - \mathrm{m}_A(\lambda)$ Einsen. Wenden wir dann ι auf alle Koeffizienten an, so lernen wir auch

$$\iota_*(B)^{-1} \cdot (\mathbb{I}_n \cdot \iota(\lambda) - \iota_* A) \cdot \iota_* B = (\iota_* B)^{-1} \cdot \iota_*(\mathbb{I}_n \cdot \lambda - A) \cdot \iota_* B = \iota_*(B^{-1} \cdot (\mathbb{I}_n \cdot \lambda - A) \cdot B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und damit
$$\mathrm{m}_{\iota_* A}(\iota(\lambda)) = n - \mathrm{rk}(\iota_*(\mathbb{I}_n \cdot \lambda - A) = n - (n - \mathrm{m}_A(\lambda)) = \mathrm{m}_A(\lambda).$$

b) Die Aussage gilt allgemeiner für jedes (normierte) irreduzible Polynom $Q \in K[T]$, dessen Bild $\iota_* Q \in L[T]$ immer noch irreduzibel ist. Denn ist $F = \prod_P P^{\mathrm{m}_F(P)}$ die Primfaktorzerlegung von F, so können wir $F = Q^{\mathrm{m}_F(Q)} \cdot H$ mit $H = \prod_{P \neq Q} P^{\mathrm{m}_F(P)}$ schreiben. Dann sind H und $Q^{\mathrm{m}_F(Q)}$ per Konstruktion teilerfremd. Nach dem Lemma von Bézout gibt es also $A, B \in K[T]$ mit $1 = A \cdot H + B \cdot Q^{\mathrm{m}_F(Q)}$. Aber dann gilt auch

$$1 = \iota_*(A \cdot H + B \cdot Q^{\mathrm{m}_F(Q)}) = \iota_* A \cdot \iota_* H + \iota_* B \cdot (\iota_* Q)^{\mathrm{m}_F(Q)}$$

und es folgt, dass $\iota_* H$ und $\iota_*(Q)^{\mathrm{m}_F(Q)}$ immer noch teilerfremd sind. Insbesondere taucht in der Primfaktorzerleung von $\iota_*(H) \in L[T]$ das Polynom $\iota_* Q$ nicht auf und damit gilt

$$\mathrm{m}_{\iota_* F}(\iota_* Q) = \mathrm{m}_{\iota_* H \cdot (\iota_* Q)^{\mathrm{m}_F(Q)}}(\iota_* Q) = \mathrm{m}_{\iota_* H}(\iota_* Q) + \mathrm{m}_{(\iota_* Q)^{\mathrm{m}_F(Q)}}(\iota_* Q) = \mathrm{m}_F(Q)$$

□

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -5 & 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(5,5,\mathbb{C})$$

diagonalisierbar ist.

Hinweis: Sie dürfen kommentarlos benutzen, dass das charakteristische Polynom von A durch $T^5 - 5T^4 + 8T^3 - 4T^2 - T + 1$ gegeben ist.

Lösungsskizze. Zunächst einmal prüfen wir auf rationale Nullstellen und finden, dass von den beiden Möglichkeiten $1, -1$ genau 1 eine ist. Um ihre Vielfachheit zu ermitteln, berechnen wir $\mathrm{d}\chi_A = 5T^4 - 20T^3 + 24T^2 - 8T - 1$ und sehen, dass 1 immer noch eine Nullstelle ist. 1 ist also mindenstens eine doppelte Nullstelle. Und $\mathrm{d}^2\chi_A = 20T^3 - 60T^2 + 48T - 8$ hat 1 auch immer noch als Nullstelle. Aber $\mathrm{d}^3\chi_A = 60T^2 - 120T + 48$ nicht mehr. Es ist also 1 eine genau dreifache Nullstelle von χ_A. Berechnen wir die geometrische Vielfachheit, also

$$\mathrm{m}_A(1) = \dim \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ -4 & 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

so hat etwa der untere rechte 3×3-Block dieser Matrix Determinante 6 und damit der Kern höchstens Dimension $5 - 3 = 2$. Also kann A nach dem zweiten Diagonalisierbarkeitskriterium nicht diagonalisierbar sein. $\square$

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Gegeben sei ein kommutativer Ring R und $0 \neq F \in R[T]$. Zeigen Sie, dass $\chi_{\mathrm{C}_F} = F$, wo C_F die Begleitmatrix von F ist.

Lösungsskizze. Es ist

$$\chi_{\mathrm{C}_F} = \det(\mathbb{I}_n \cdot T - \mathrm{C}_F) = \begin{pmatrix} T & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & F_0 \\ -1 & T & 0 & \dots & 0 & 0 & F_1 \\ 0 & -1 & T & \dots & 0 & 0 & F_2 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & F_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & T & F_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & T + F_{n-1} \end{pmatrix}$$

Berechnen wir diese Determinante mit der Leibnizformel so verschwinden offenbar alle Summanden für Permutationen $\sigma \in \Sigma_n$ für die für ein $1 \leq i < n$ nicht $\sigma(i) \in \{i, i+1\}$ gilt, da dann $(\mathbb{I}_n \cdot T - \mathrm{C}_F)_{i,\sigma(i)} = 0$ gilt. Ich behaupte es gibt genau n Permutationen für diese Bedingung gilt, nämlich für $k \in \{1, \dots, n\}$ die Permutationen

$$\tau_k \colon \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}, \quad i \longmapsto \begin{cases} i & i < k \\ i+1 & k \leq i < n \\ k & i = n \end{cases}$$

Gilt nämlich $\sigma(l) = l$ für eine solche Permutation, so muss auch $\sigma(i) = i$ für alle $i < l$ gelten damit σ überhaupt injektiv sein kann. Gibt es kein solches l, so muss also $\sigma(i) = i + 1$ für alle $1 \leq i < n$ gelten und damit $\sigma = \tau_1$, und ist ansonsten $k = \max\{l \in \{1,\dots,n\} \mid \sigma(l) = l\} + 1$, so muss $\sigma(i) = i+1$ für alle $k \leq i < n$ und damit $\sigma = \tau_k$. Aber wir haben also

$$\chi_{\mathrm{C}_F} = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sgn}(\tau_k) \prod_{i=1}^{n} (\mathbb{I}_n \cdot T - \mathrm{C}_F)_{i,\tau_k(i)}$$

Nun beobachtet man

$$\prod_{i=1}^{n} (\mathbb{I}_n \cdot T - \mathrm{C}_F)_{i,\tau_k(i)} = \begin{cases} T^{k-1} \cdot (-1)^{n-k} \cdot F_{k-1} & k < n \\ T^{n-1} \cdot (T + F_{n-1}) & k = n \end{cases}$$

und dass τ_k genau $n-k$ Fehlstände hat, was zu $\operatorname{sgn}(\tau_k) = (-1)^{n-k}$ führt. Insgesamt erhalten wir also

$$\chi_{\mathrm{C}_F} = T^{n-1} \cdot (T + F_{n-1}) + \sum_{k=1}^{n-1} F_{k-1} \cdot T^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} F_k \cdot T^k = F$$

wie behauptet. □

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 5 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3,3,\mathbb{C})$$

diagonalisierbar ist. Wie sieht es über $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ aus?

Lösungsskizze. Das charakteristische Polynom ist $\chi_A = T^3 - 3T^2 - 30T - 4$. Berechnen wir die Ableitung $\mathrm{d}\chi_A = 3T^2 - 6T - 30$, so erhalten wir als Nullstellen davon mittels quadratischer Ergänzung $1 + \sqrt[2]{11}$ und $1 - \sqrt[2]{11}$. Aber diese sind keine Nullstellen von χ_A: Etwas gilt

$$(1+\sqrt[2]{11})^3 - 3(1+\sqrt[2]{11})^2 - 30(1+\sqrt[2]{11}) - 4 = 1 + 3\sqrt[2]{11} + 33 + 11\sqrt[2]{11} - 3 - 6\sqrt[2]{11} - 33 - 30 - 30\sqrt[2]{11} = -32 - 22\sqrt[2]{11}$$

$$(1-\sqrt[2]{11})^3 - 3(1-\sqrt[2]{11})^2 - 30(1-\sqrt[2]{11}) - 4 = 1 - 3\sqrt[2]{11} + 33 - 11\sqrt[2]{11} - 3 + 6\sqrt[2]{11} - 33 - 30 + 30\sqrt[2]{11} = -32 + 22\sqrt[2]{11}$$

und $1, \sqrt[2]{11} \in \mathbb{R}$ sind linear unabhängig über $\mathbb{Q}$, also können diese Summen nicht 0 ergeben (das folgt natürlich auch aus jeder Menge anderer Gründe). Damit ist nach dem Differentialkriterium jede Nullstelle von χ_A einfach. Die Matrix ist also über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar.

Indem man $-4, -2, -1, 1, 2, 4$ einsetzt sieht man aufgrund des Lemmas von Gauß auch leicht, dass χ_A keine rationalen Nullstellen besitzt, also A keinen rationalen Eigenwert, erst recht ist A rational nicht diagonalisierbar. Der Fall $\mathbb{R}$ ist der wohl komplizierteste. Hier gibt es auf jeden Fall eine Nullstelle (jedes ungerade reelle Polynom hat eine reelle Nullstelle). In der Tat gibt es aber drei Stück. Das folgt aus dem Zwischenwertsatz da

$$\chi_A(1-\sqrt[2]{11}) = -32 + 22\sqrt[2]{11} > -32 + 22 \cdot 3 = 64 > 0 \quad \text{und} \quad \chi_A(1+\sqrt[2]{11}) = -32 - 22\sqrt[2]{11} < 0$$

($1-\sqrt[2]{11}$ ist also ein lokales Maximum und $1+\sqrt[2]{11}$ ein lokales Minimum von $\mathrm{apf}(\chi_A)$), aber für größ genuges $t \in \mathbb{R}$ aufgrund des positiven Leitkoeffizienten

$$\chi_A(-t) < 0 \quad \text{und} \quad \chi_A(t) > 0$$

gilt. Es gibt also eine Nullstelle von χ_A, die kleiner also $1-\sqrt[2]{11}$ ist, eine zwischen $1-\sqrt[2]{11}$ und $1+\sqrt[2]{11}$, und eine, die größer als $1-\sqrt[2]{11}$ ist. Ergo ist A schon über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar. □