Aufgabe 1 (5 Punkte)

Es seien $\iota\colon K \to L$ Körper und $A \in \mathrm{Mat}(n,n,K)$ und $\lambda \in K$ ein Eigenwert von A, $F, P \in K[T]$ und mit P irreduzibel und $P \mid F$. Zeigen Sie:

a) Es gilt $\mathrm{m}_A(\lambda) = \mathrm{m}_{\iota_*(A)}(\iota(\lambda))$, wo
$$\iota_*\colon \mathrm{Mat}(n,n,K) \longrightarrow \mathrm{Mat}(n,n,L)$$
die Abbildung ist, die ι auf jeden Koeffizienten einer Matrx anwendet.

b) Es gilt $\mathrm{m}_F(P) = \mathrm{m}_{\iota_*(F)}(\iota_*(P))$, wo
$$\iota_*\colon K[T] \longrightarrow L[T], \quad T \longmapsto T$$
die Abbildung ist, die ι auf jeden Koeffizienten eines Polynoms anwendet. Insbesondere gilt $\mathrm{m}_F(T-\mu) = \mathrm{m}_{\iota_*(F)}(T - \iota(\mu))$ für jede Nullstelle $\mu \in K$ von F.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die Matrix
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -5 & 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(5,5,\mathbb{C})$$
diagonalisierbar ist.

Hinweis: Sie dürfen kommentarlos benutzen, dass das charakteristische Polynom von A durch $T^5 - 5T^4 + 8T^3 - 4T^2 - T + 1$ gegeben ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Gegeben sei ein kommutativer Ring R und $0 \neq F \in R[T]$. Zeigen Sie, dass $\chi_{\mathrm{C}_F} = F$, wo C_F die Begleitmatrix von F ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die Matrix
$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 5 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3,3,\mathbb{C})$$
diagonalisierbar ist. Wie sieht es über $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ aus?