

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Bestimmen Sie das Minimalpolynom von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 4 & -4 & -3 & 0 \\ -13 & 13 & 13 & 4 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(3, 3, \mathbb{C})$$

und entscheiden Sie, ob A diagonalisierbar ist.

Lösungsskizze. Die Matrix A ist kein Vielfaches der Identität. Damit muss $\min_A$ mindestens Grad 2 haben. Es gilt

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & -9 & -10 & -4 \\ -12 & 12 & 13 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Versuchen wir also $A^2 + x \cdot A + y \mathbb{I}_4 = 0$ zu lösen. Die ersten Einträge der ersten Spalte liefern die Gleichungen

$$1 + x + y = 0 \quad \text{und} \quad 10 + x = 0$$

was $x = -10$ und $y = 9$ erzwingt. Das liefert uns den Kandidaten $T^2 - 10T + 9$ für das Minimalpolynom. Aber die Gleichung an der dritten Stelle der ersten Spalte lautet

$$-12 + 4x = 0$$

und das wird sicherlich nicht von $x = -10$ gelöst. Das Minimalpolynom hat also mindestens Grad 3. Wir berechnen

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 13 & -12 & -13 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ -39 & 39 & 39 & 12 \end{pmatrix}$$

Die ersten drei Einträge der ersten Spalte in $A^3 + xA^2 + yA + z\mathbb{I}_4 = 0$ liefern also das Gleichungssystem

$$1 + 1 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z = 0$$

$$13 + 10 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z = 0$$

$$0 - 12 \cdot x + 4 \cdot y + 0 \cdot z = 0$$

was man mit einer Runde Gauß-Algorithmus lösen kann:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 10 & 1 & 0 & -13 \\ -12 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{1/4III} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 10 & 1 & 0 & -13 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{III-II} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 10 & 1 & 0 & -13 \\ -13 & 0 & 0 & 13 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{-1/13III} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 10 & 1 & 0 & -13 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{I-III, II-10III} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{I-II} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

□

Das liefert uns des Kandidaten $T^3 - T^2 - 3T + 3$ als Minimalpolynom. Und in der Tat sind die andere 13 Gleichungen

$$-39 + (-1) \cdot 0 + (-3) \cdot (-13) + 3 \cdot 0 = 0$$

$$0 + (-1) \cdot 0 + (-3) \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$$

$$-12 + (-1) \cdot (-9) + (-3) \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 0$$

$$\begin{aligned}
0 + (-1) \cdot 12 + (-3) \cdot (-4) + 3 \cdot 0 &= 0 \\
39 + (-1) \cdot 0 + (-3) \cdot (13) + 3 \cdot 0 &= 0 \\
0 + (-1) \cdot 0 + (-3) \cdot 0 + 3 \cdot 0 &= 0 \\
-13 + (-1) \cdot (-10) + (-3) \cdot (-1) + 3 \cdot 0 &= 0 \\
1 + (-1) \cdot 13 + (-3) \cdot (-3) + 3 \cdot 1 &= 0 \\
39 + (-1) \cdot 0 + (-3) \cdot 13 + 3 \cdot 0 &= 0 \\
0 + (-1) \cdot 0 + (-3) \cdot 0 + 3 \cdot 0 &= 0 \\
-7 + (-1) \cdot (-4) + (-3) \cdot (-1) + 3 \cdot 0 &= 0 \\
4 + (-1) \cdot 4 + (-3) \cdot 0 + 3 \cdot 0 &= 0 \\
12 + (-1) \cdot 3 + (-3) \cdot 4 + 3 \cdot 1 &= 0
\end{aligned}$$

sind erfüllt. Überraschend, nicht wahr? Es gilt jedenfalls folglich

$$\min_A = T^3 - T^2 - 3T + 3.$$

Es ist offenbar 1 eine Nullstelle hiervon, und eine Runde Polynomdivision liefert

$$\min_A = (T-1)(T^2-3) = (T-1)(T-\sqrt[2]{3})(T+\sqrt[2]{3})$$

Nach dem dritten Diagonalisierbarkeitkriterium ist A also diagonalisierbar. Es muss übrigenfalls A ähnlich zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[2]{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt[2]{3} \end{pmatrix}$$

sein (nicht dass das gefragt war), da für das charakteristische Polynom χ_A etwa nach dem zweiten Diagonalisierbarkeitkriterium oder dem Satz von Cayley und Hamilton nur die drei Möglichkeiten

$$(T-1)^2(T-\sqrt[2]{3})(T+\sqrt[2]{3}), \quad (T-1)(T-\sqrt[2]{3})^2(T+\sqrt[2]{3}) \quad \text{oder} \quad (T-1)(T-\sqrt[2]{3})(T+\sqrt[2]{3})^2$$

übrig bleiben, aber die rechten beiden Polynome im Gegensatz zu χ_A keine ganzzahligen Koeffizienten haben (der 0-te Koeffizient ist $-3\sqrt[2]{3}$ bzw. $3\sqrt[2]{3}$).

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Zeigen Sie: Eine Matrix $A \in \text{Mat}(n, n, K)$ ist invertierbar genau dann, wenn $\min_A(0) \neq 0$ und in diesem Falle gibt es ein Polynom $F \in K[T]$ mit $A^{-1} = F(A)$.

Lösungsskizze. Ist etwa $\min_A = \sum_{i=0}^n c_i \cdot T^i$, so bedeutet $\min_A(0) = 0$ gerade $c_0 = 0$ und allgemein haben wir

$$-c_0 \cdot \mathbb{I}_n = \sum_{i=1}^n c_i \cdot A^i = A \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} c_{i+1} \cdot A^i \right)$$

Ist nun $c_0 = 0$ folgt $0 = A \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} c_{i+1} \cdot A^i \right)$. Wäre A invertierbar, so würde $\sum_{i=0}^{n-1} c_{i+1} \cdot A^i = 0$ folgen. Dann wäre $\sum_{i=0}^{n-1} c_{i+1} \cdot T^i$ ein normiertes Polynom vom Grad $n-1$, welches A annulliert. So etwas kann es aber nach Definition des Minimalpolynoms nicht geben. Also ist A nicht invertierbar.

Ist andererseits $c_0 \neq 0$ so erhalten wir

$$\mathbb{I}_n = A \cdot \left(- \sum_{i=0}^{n-1} \frac{c_{i+1}}{c_0} \cdot A^i \right)$$

also ist $A^{-1} = F(A)$ für

$$F = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{-c_{i+1}}{c_0} \cdot T^i = \frac{-1}{\min_A(0)} \cdot \frac{\min_A - \min_A(0)}{T} \in K[T].$$

□

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Es sei V ein endlich dimensionaler K -Vektorraum und $\varphi: V \rightarrow V$ K -linear und sei $\min_{\varphi} = \prod_{i=1}^k P_i^{n_i}$ die Primfaktorzerlegung des Minimalpolynoms von φ und $\varphi_i: \text{Ker}(P_i^{n_i}(\varphi)) \rightarrow \text{Ker}(P_i^{n_i}(\varphi))$ die Einschränkung von φ . Zeigen Sie:

- Sind $U, U' \subseteq V$ Untervektorräume mit $\text{Im}_{\varphi}(U) \subseteq U$ und $\text{Im}_{\varphi}(U') \subseteq U'$ so ist $\min_{\varphi|_{U+U'}}$ das kleinste gemeinsame Vielfache von $\min_{\varphi|_U}$ und $\min_{\varphi|_{U'}}$.
- Es gilt $\min_{\varphi_i} = P_i^{n_i}$ für jedes $1 \leq i \leq k$
- Es gilt $\dim_K(\text{Ker}(P_i^{n_i}(\varphi))) = \deg(P_i) \cdot m_{\chi_{\varphi}}(P_i)$ für jedes $1 \leq i \leq k$.

Für c) werden sie wohl den Satz von Cayley-Hamilton benutzen müssen.

Anmerkung: Insbesondere liefert c) also

$$\dim_K(\text{Hpt}_{\varphi}(\lambda)) = m_{\chi_{\varphi}}(T - \lambda)$$

und damit eine geometrische Interpretation der algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte im charakteristischen Polynom und wegen $\text{Eig}_{\varphi}(\lambda) \subseteq \text{Hpt}_{\varphi}(\lambda)$ auch einen zweiten Beweis, dass $m_{\varphi}(\lambda) \leq m_{\chi_{\varphi}}(T - \lambda)$.

Lösungsskizze. a) Zunächst annulliert $\min_{\varphi|_{U+U'}}$ sicherlich die Einschränkungen von φ auf U und U' (es annulliert ja sogar die eine Einschränkung auf $U + U'$), sodass

$$\min_{\varphi|_U} \mid \min_{\varphi|_{U'+U}} \quad \text{und} \quad \min_{\varphi|_{U'}} \mid \min_{\varphi|_{U'+U}}$$

nach der Diskussion unmittelbar nach der Definition des Minimalpolynoms. Es ist also $\min_{\varphi|_{U'+U}}$ ein gemeinsames Vielfaches von $\min_{\varphi|_U}$ und $\min_{\varphi|_{U'}}$. Und gilt $F = H \cdot \min_{\varphi|_U}$ und $F = H' \cdot \min_{\varphi|_{U'}}$ für $H, H' \in K[T]$, so folgt sicherlich für $u \in U$

$$(F(\varphi|_{U+U'}))|_U(u) = (F(\varphi|_U))(u) = (H(\varphi|_U) \circ \min_{\varphi|_U}(\varphi|_U))(u) = 0$$

und damit $F(\varphi|_{U+U'})|_U = 0$. Analog folgt $F(\varphi|_{U+U'})|_{U'} = 0$ und damit sicherlich $F(\varphi|_{U+U'}) = 0$ und damit $\min(\varphi|_{U+U'}) \mid F$. Jedes gemeinsame Vielfache von $\min_{\varphi|_U}$ und $\min_{\varphi|_{U'}}$ wird also von $\min(\varphi|_{U+U'})$ geteilt. Es hat also $\min(\varphi|_{U+U'})$ kleinsten Grad unter allen diesen gemeinsamen Vielfachen.

- Sei $U_i = \text{Ker}(P_i^{n_i}(\varphi))$. Dann gilt tautologischerweise

$$P_i^{n_i}(\varphi_i) = P_i^{n_i}(\varphi|_{U_i}) = P_i^{n_i}(\varphi)|_{U_i} = 0$$

und damit $\min_{\varphi_i} \mid P_i^{n_i}$, sodass $\min_{\varphi_i} = P_i^{m_i}$ für irgendwelche $m_i \leq n_i$ aufgrund der Irreduzibilität von P_i . Aber da die $P_i^{n_i}$ alle teilerfremd zueinander sind (sodass ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches ihr Produkt ist!) folgt dann aus a), dass

$$\min_{\varphi} = \prod_{i=1}^k P_i^{m_i}$$

und damit $m_i = n_i$ nach Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung.

- Nach dem Satz von Cayley-Hamilton gilt nach b) $\chi_{\varphi_i} = P_i^{l_i}$ für irgendwelche $l_i \geq n_i$ und damit

$$\dim(U_i) = \deg(\chi_{\varphi_i}) = \deg(P_i) \cdot l_i.$$

Nach der letzten Aufgabe des fünften Zettels gilt aber weiter $\chi_{\varphi} = \prod_{i=1}^k \chi_{\varphi_i} = \prod_{i=1}^k P_i^{l_i}$ und damit $l_i = m_{\chi_{\varphi}}(P_i)$, was zu zeigen war.

□

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Sei $A \in \text{Mat}(n, n, K)$ eine Matrix mit $A^2 = \mathbb{I}_n$. Zeigen Sie: Ist $\text{char}(K) \neq 2$, so ist A ähnlich zu einer Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(n, n, K).$$

Wie sieht es aus, wenn K Charakteristik 2 hat?

Lösungsskizze. Es gilt per Annahme $F(A) = 0$ für $F = T^2 - 1 = (T + 1)(T - 1)$ und damit $\min_A \mid T^2 - 1$. Also gibt es die Möglichkeiten

$$T - 1, \quad T + 1, \quad \text{und} \quad T^2 - 1$$

für $\min_A$. In jedem Falle zerfällt für $\text{char}(K) \neq 2$ das Polynome $\min_A$ vollständig in Linearfaktoren und hat nur einfache Nullstellen. Es ist also nach dem dritten Kriterium A diagonalisierbar mit Eigenwerte 1 oder -1 oder beides, in jedem Falle von der Form in der Aufgabe.

Für $K = 2$ muss das nicht gelten: Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(2, 2, K)$$

erfüllt $A^2 = \mathbb{I}_2$, ist aber kein Vielfaches von $\mathbb{I}_2$, sodass $\min_A = T^2 + 1 = (T + 1)^2$ gelten muss. Damit ist A aber nach dem dritten Diagonalisierbarkeitskriterium nicht diagonalisierbar, weil es eine doppelte Nullstelle hat.

Das ganze kann man natürlich auch ohne Benutzung des Minimalpolynoms beweisen: Für $v \in K^n$ gilt

$$x = \frac{x - A \cdot x}{2} + \frac{x + A \cdot x}{2}$$

und es gilt

$$A \cdot \frac{x - A \cdot x}{2} = \frac{A \cdot x - x}{2} = -\frac{x - A \cdot x}{2} \quad \text{und} \quad A \cdot \frac{x + A \cdot x}{2} = \frac{A \cdot x + x}{2} = \frac{x + A \cdot x}{2},$$

sodass $\frac{x - A \cdot x}{2} \in \text{Eig}_{-1}(A)$ und $\frac{x + A \cdot x}{2} \in \text{Eig}_1(A)$ und damit $K^n = \text{Eig}_1(A) + \text{Eig}_{-1}(A)$ und damit ist A nach dem ersten Diagonalisierbarkeitskriterium diagonalisierbar. $\square$