Aufgabe 1 (5 Punkte)

Bestimmen Sie das Minimalpolynom von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 4 & -4 & -3 & 0 \\ -13 & 13 & 13 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3,3,\mathbb{C})$$

und entscheiden Sie, ob A diagonalisierbar ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Zeigen Sie: Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n,n,K)$ ist invertierbar genau dann, wenn $\min_A(0) \neq 0$ und in diesem Falle gibt es ein Polynom $F \in K[T]$ mit $A^{-1} = F(A)$.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Es sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ K-linear und sei $\min_\varphi = \prod_{i=i}^k P_i^{n_i}$ die Primfaktorzerlegung des Minimalpolynoms von φ und $\varphi_i\colon \mathrm{Ker}(P_i^{n_i}) \to \mathrm{Ker}(P_i^{n_i})$ die Einschränkung von φ. Zeigen Sie:

a) Sind $U, U' \subseteq V$ Untervektorräume mit $\mathrm{Im}_\varphi(U) \subseteq U$ und $\mathrm{Im}_\varphi(U') \subseteq U'$ so ist $\min_{\varphi_{|U'+U}}$ das kleinste gemeinsame Vielfache von $\min_{\varphi_{|U}}$ und $\min_{\varphi_{|U'}}$.

b) Es gilt $\min_{\varphi_i} = P_i^{n_i}$ für jedes $1 \leq i \leq k$

c) Es gilt $\dim_K(\mathrm{Ker}(P^{n_i}(\varphi)) = \deg(P_i) \cdot \mathrm{m}_{\chi_\varphi}(P_i)$ für jedes $1 \leq i \leq k$.

Für c) werden sie wohl den Satz von Cayley-Hamilton benutzen müssen.

Anmerkung: Insbesondere liefert c) also

$$\dim_K(\mathrm{Hpt}_\varphi(\lambda)) = \mathrm{m}_{\chi_\varphi}(T-\lambda)$$

und damit eine geometrische Interpretation der algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte im charakteristischen Polynom und wegen $\mathrm{Eig}_\varphi(\lambda) \subseteq \mathrm{Hpt}_\varphi(\lambda)$ auch einen zweiten Beweis, dass $\mathrm{m}_\varphi(\lambda) \leq \mathrm{m}_{\chi_\varphi}(T-\lambda)$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Sei $A \in \mathrm{Mat}(n,n,K)$ eine Matrix mit $A^2 = \mathbb{I}_n$. Zeigen Sie: Ist $\mathrm{char}(K) \neq 2$, so ist A ähnlich zu einer Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(n,n,K).$$

Wie sieht es aus, wenn K Charakteristik 2 hat?